Planche à clous

Le matériel est constitué d'une planchette sur laquelle sont plantés des clous ou des chevilles régulièrement disposés sur lesquels on tend quelques élastiques. On constitue avec ceux-ci des contours polygonaux.

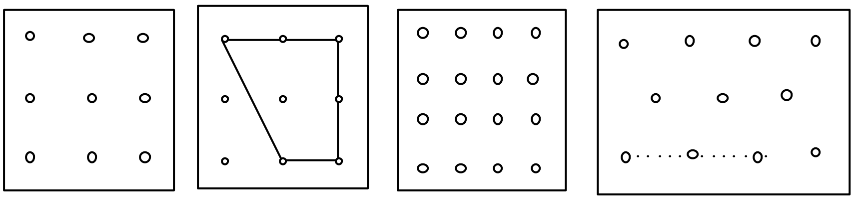


fig. 1 *fig. 2* *fig. 3* *fig. 4*

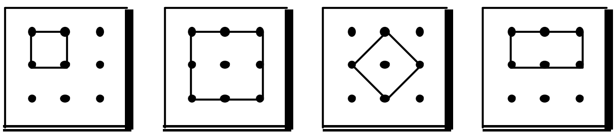
On peut envisager des planchettes à 9 clous (fig. 1 et 2), ou davantage (fig.3), ou des dispositions en quinconce (fig.4). On emploie en même temps des feuilles de papier “pointé”, sur lesquelles des points reproduisent (à la même échelle) la disposition des clous de la planche.(ces documents papiers sont fournis en Annexes de cette fiche)

Objectif : L'approche de la notion d'aire, la comparaison d’aires, voire leur évaluation peuvent être abordées sans formule ni instrument de mesure. C’est une démarche de preuve géométrique et non pas algébrique (résultant d’un calcul). Cette voie, moins habituelle, est plus accessible car s’appuyant sur des manipulations et de ce fait plus propre à (re)fonder la compréhension des notions.

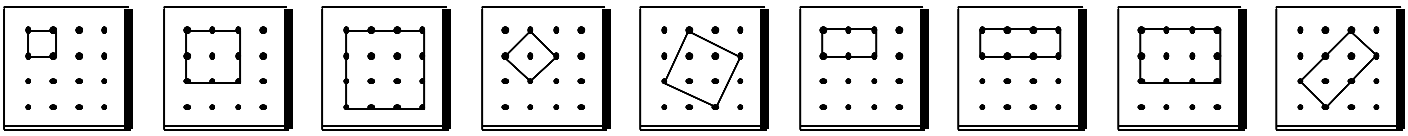
I) Catalogue de contours.

- **Fiche 7a** : Répertorier sur une feuille de papier pointé tous les carrés et les rectangles que l'on peut obtenir sur une planche à 9 clous, puis sur une planche à 16 clous. L'opération de comparaison est la superposition (après découpage si nécessaire). On ne retient que les figures non superposables entre elles (par déplacement ou retournement).

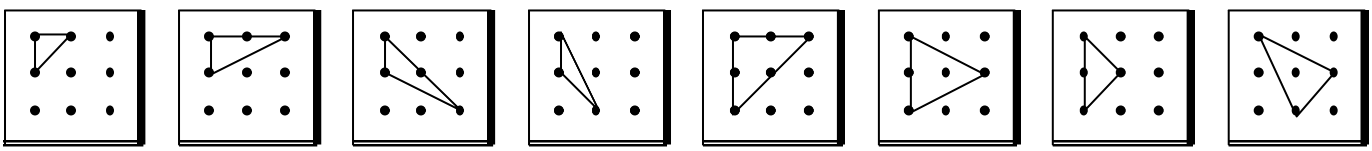
Solutions sur une planche à <u>9 clous</u> ⟶



Solutions sur une planche à 16 clous

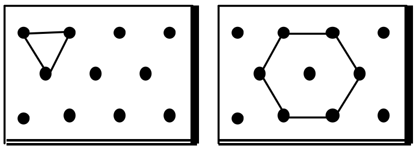


- **Fiche 7b** : Répertorier ensuite tous les triangles (Planche à 9 clous).
Combien obtient-on de triangles différents ?



Peut-on obtenir des triangles équilatéraux ? des hexagones réguliers ?
Trouver plusieurs critères permettant de classer ces triangles. (côtés égaux, angle droit, même périmètre, même aire etc). Après les avoir désignés par des lettres (A, B, C,…), représenter, dans un tableau, le classement obtenu.

Quels polygones réguliers peut-on obtenir sur la planche de la figure 4 ?

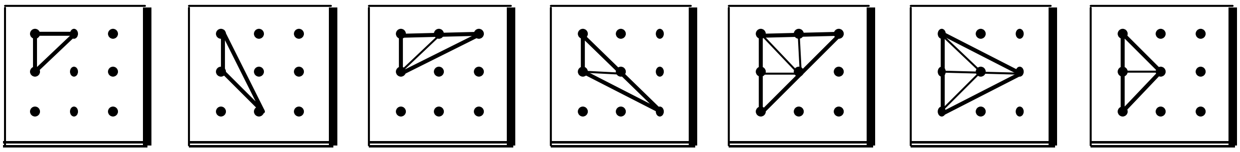


II) Approche de la notion d'aire.

- **Fiche 7c** : Montrer que tous les triangles obtenus peuvent être construits à partir d'assemblages de seulement deux triangles non superposables. Lesquels ? Dans la suite, ils seront appelés triangles de base A et B (A étant le triangle rectangle).

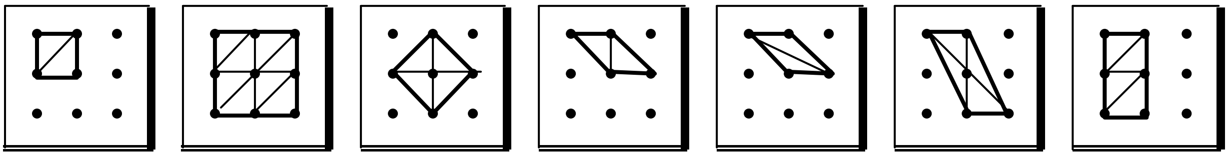
Exprimer la décomposition de tous les triangles en fonction de A et B. On utilise la notation ⊕ pour exprimer les décompositions sur les deux triangles de base.

Exemple : G se décomposant en deux triangles A, on écrit G = A ⊕ A
D se décomposant en A et B on écrit D = A ⊕ B etc.



A **B** C = A ⊕ B D = A ⊕ B E = 4A F = 2A⊕ 2B G=A⊕ A

Donner également les décompositions des carrés et des parallélogrammes que l'on peut obtenir sur la planche à 9 clous.

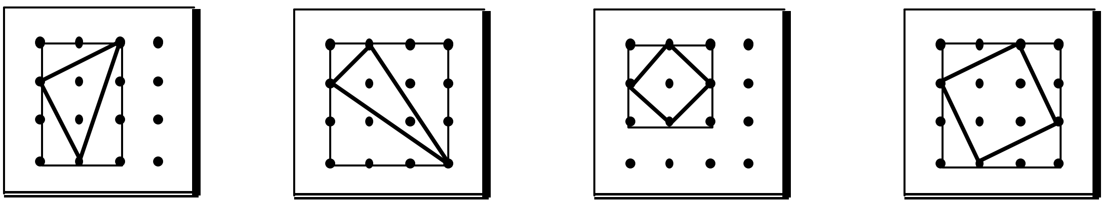


H=2A I=8A J=4A K=2A ou K=2B L=2A⊕ 2B M=4A

Déduire de ce qui précède que A et B ont même aire. les deux décompositions de K montrent directement que 2A = 2B donc que A et B ont la même aire.
La mesure de l'aire est le nombre d'unités contenues dans une surface.

<u>ATTENTION</u> : Ici, on prend A ou B comme unité d'aire ce qui permet de ne travailler qu'avec des nombres entiers dans les fiches suivantes.
Déduire de ce qui précède les mesures des aires de tous les triangles, carrés, parallélogrammes précédents.

- Fiche 7d : Sur une planche à 16 clous, déterminer la mesure de l'aire du triangle indiqué.
Déterminer un autre triangle de même aire, un carré dont l'aire est 4; et sur une planche à 25 clous, un carré dont l'aire est 10.



12 –2 –2 –3 = **5** 18 –6 –6 –1 = **5** 8 –1x4 = **4** 18 –4x2= **10**

III) Formule de Pick[1].

- Fiche 7e : Pour chaque polygone on appelle N le nombre de clous situés sur le pourtour et P le nombre de clous situés à l'intérieur (ainsi pour A : N=3 et P=0). Reporter dans le tableau qui suit les noms des figures étudiées jusqu'ici dans la case qui leur convient, ainsi que la mesure S de leur aire.

	P=0					P=1					
	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8
Nom	A B	C D G H K		E M			F J L				I
Aire	1	2		4			4				8

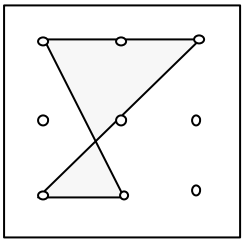
Que remarque-t-on concernant les surfaces se trouvant dans une même case ?

Réponse : Elles ont la même aire. Les valeurs de N et de P semblent déterminer l'aire de la surface .

Vérifier sur quelques polygones que S, N, P sont liés par la relation :

$$S = N-2 + 2P$$

- On appelle “quadrilatère croisé” la figure représentée ci-contre. Montrer que la relation obtenue précédemment ne peut lui être appliquée.



[1] 1899

Annexes

Planche à mailles carrés

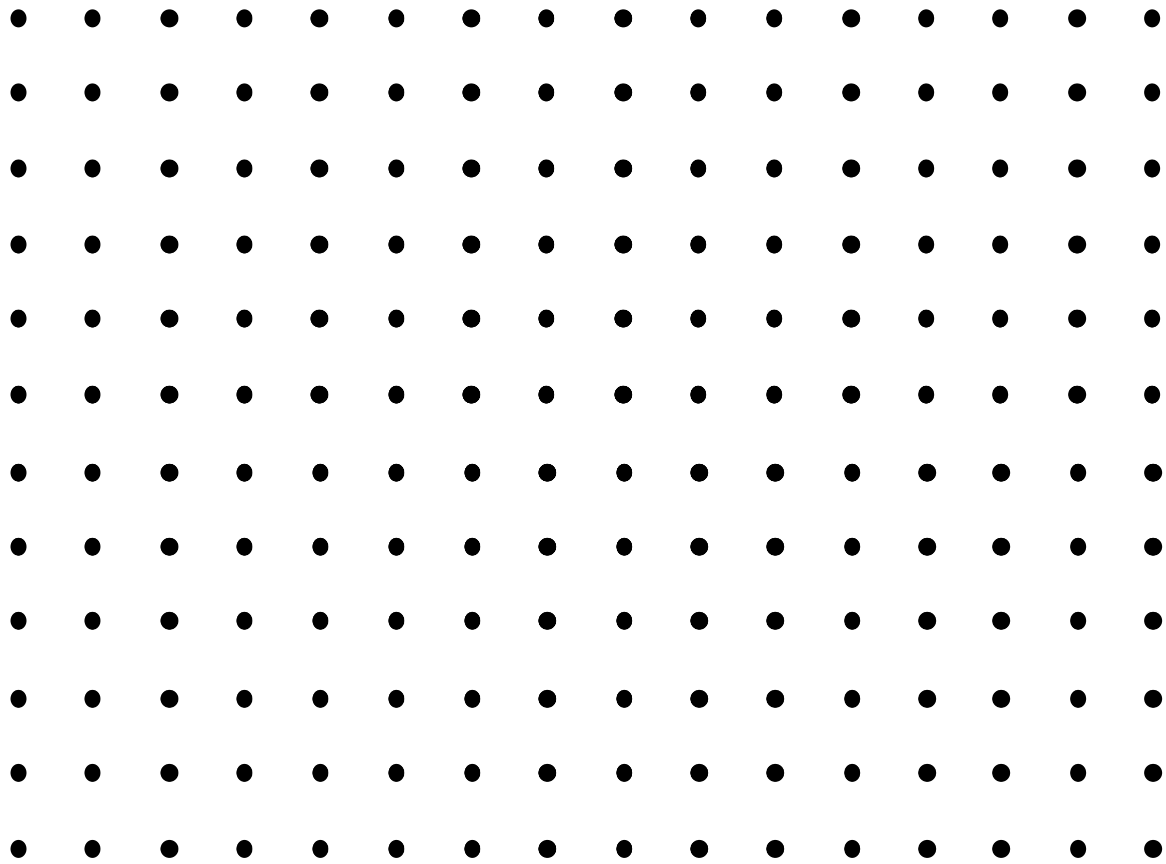
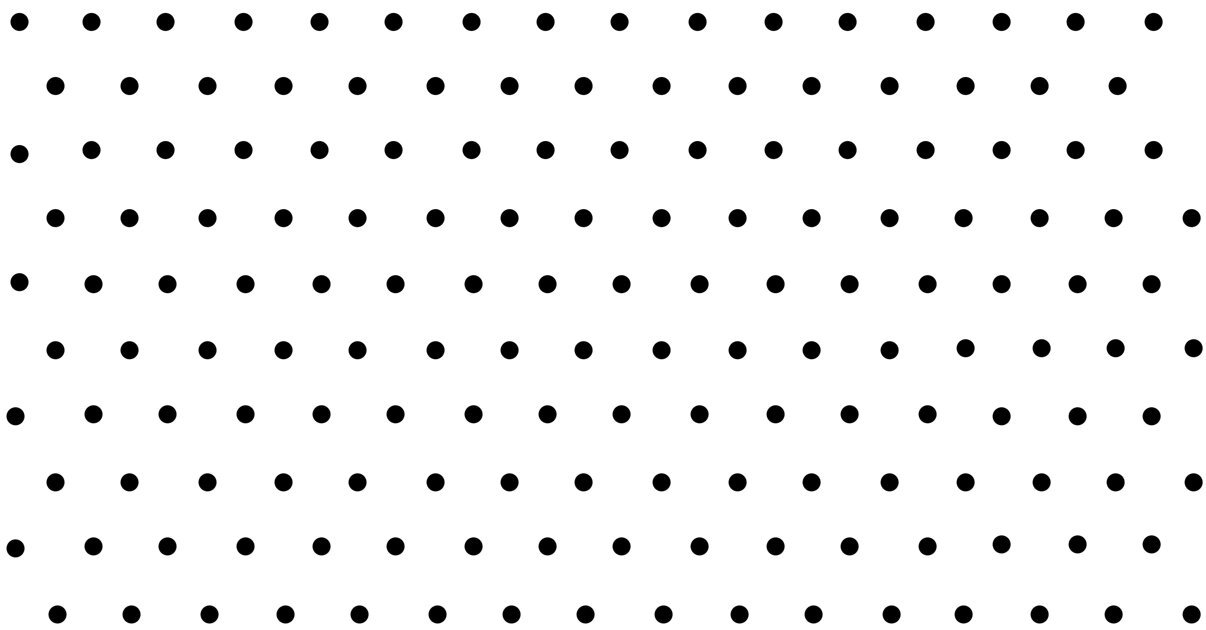
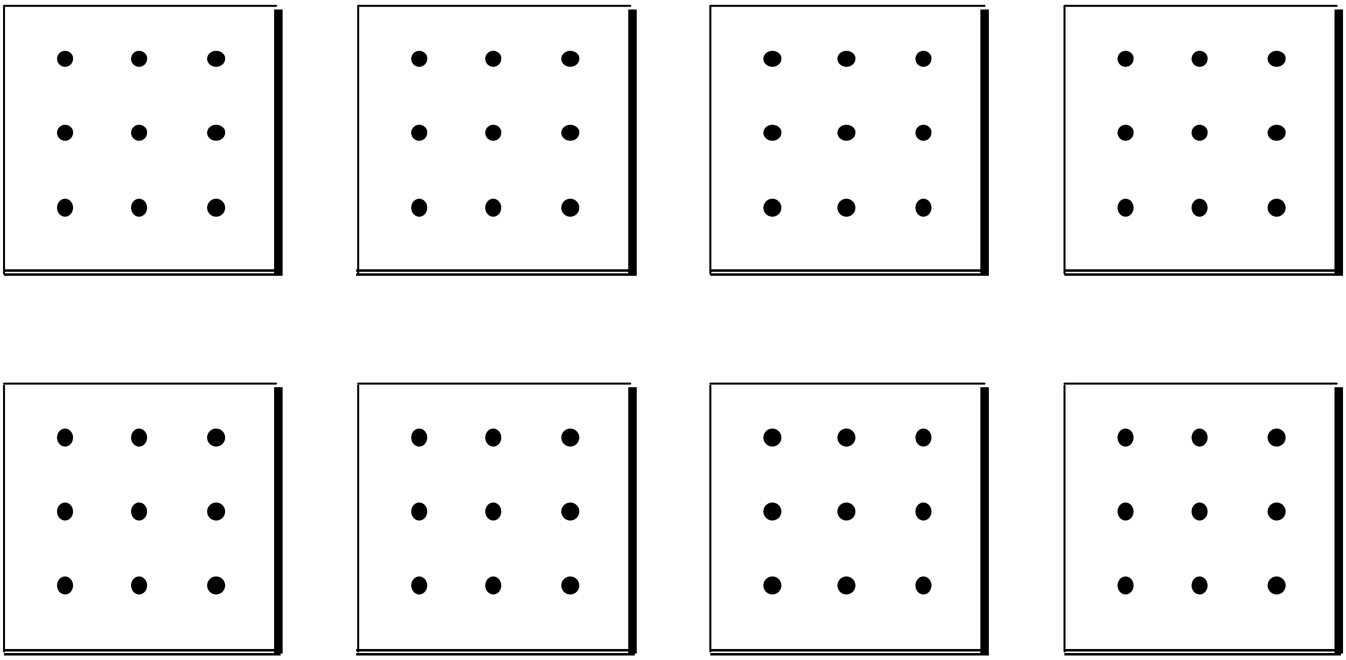


Planche à mailles triangulaires (Triangles équilatéraux)

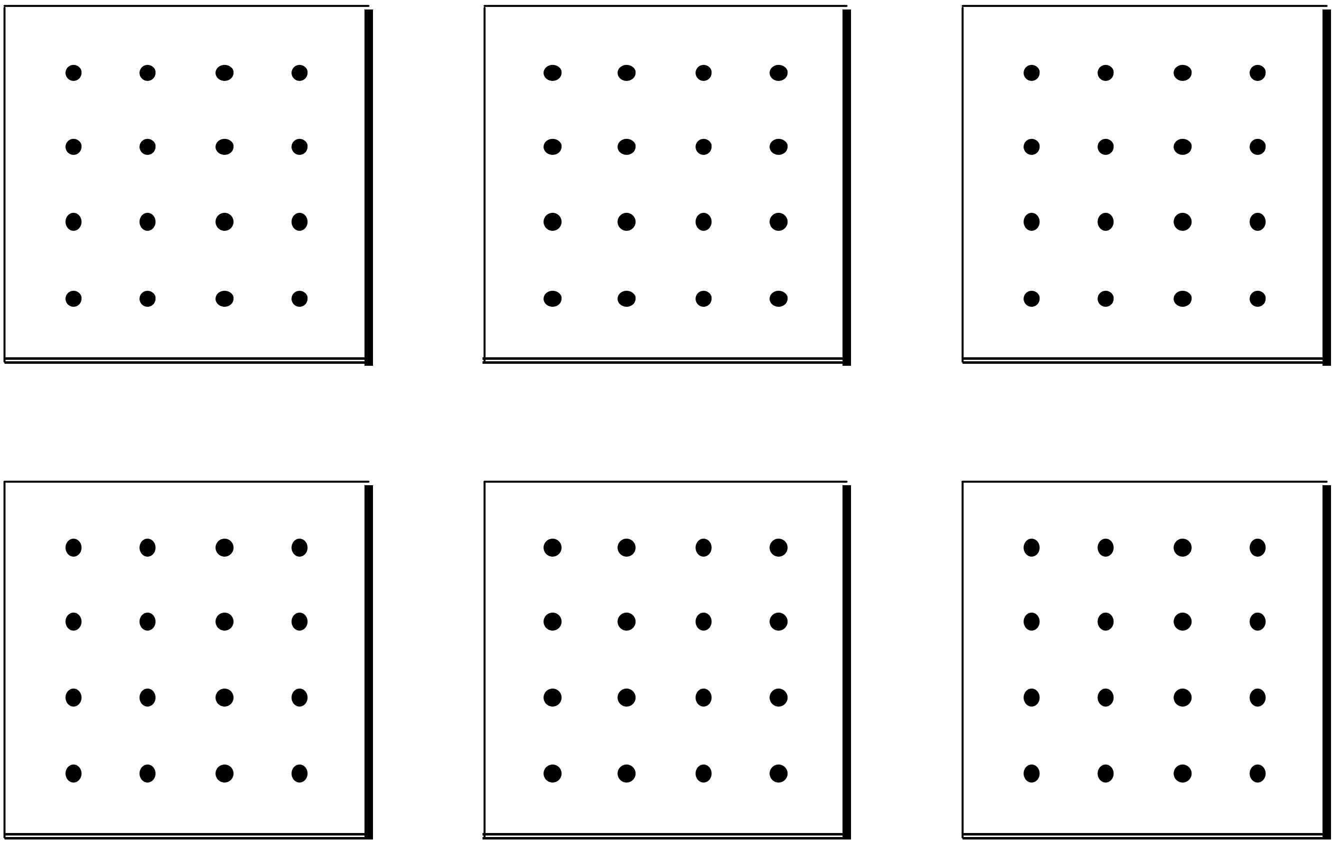


Annexes

Planchettes à 9 clous

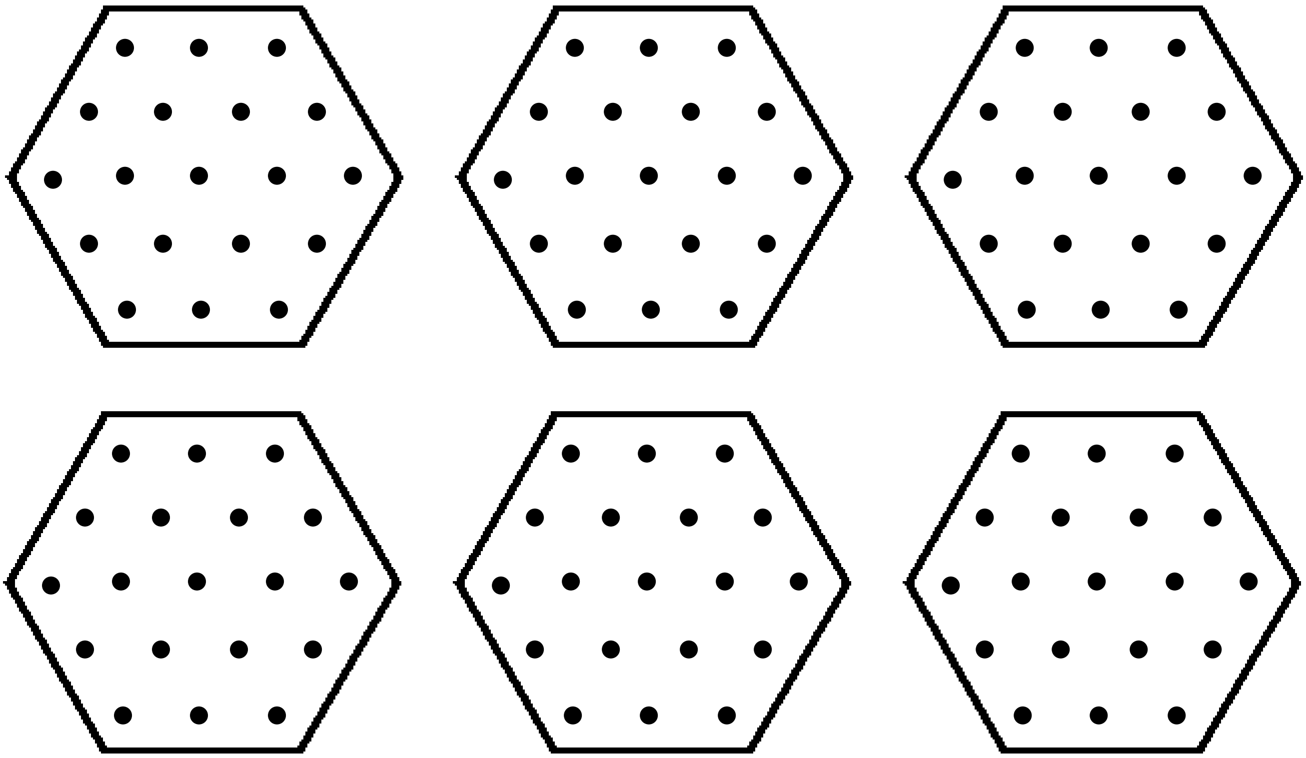


Planchettes à 16 clous



Annexes

Mailles Triangles équilatéraux (Planche hexagonale)



Mailles Triangles équilatéraux (Planche triangulaire)