Loi binomiale – espérance

Contexte pédagogique

Objectifs

- Dans le domaine des probabilités, découvrir et utiliser un premier exemple de loi discrète : la loi binomiale.
- Introduire la notion d'espérance mathématique d'une loi binomiale.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi binomiale Loi binomiale $B(n,p)$.	• Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale et en identifier les paramètres. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou du tableur. • Représenter graphiquement la loi binomiale par un diagramme en bâtons.	La notion de factorielle, les coefficients binomiaux et l'expression générale de $P(X = k)$ ne sont pas des attendus du programme. Pour introduire la loi binomiale, la représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. Pour $n \leq 4$, on peut ainsi dénombrer les chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions et calculer la probabilité d'obtenir k succès. ◊ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme. Après cette mise en place, on utilise un tableur ou une calculatrice pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale.
Espérance de la loi binomiale.	• Déterminer l'espérance de la loi binomiale. • Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.	On admet l'expression de l'espérance de la loi binomiale. L'espérance peut être conjecturée ou illustrée à l'aide de simulations.

Prérequis, capacités

- Calcul d'une moyenne.
- Fluctuations d'échantillonnage.

Utilisation d'outils logiciels :

- Calcul de sommes.
- Adressage relatif et absolu.
- Fonction ALEA()

Les intentions

Une introduction à l'aide de chemins dans un arbre est décrite dans le document ressource pour les classes de premières générales. La loi binomiale ayant ainsi été abordée, il s'agit ici d'introduire l'espérance de cette loi à l'aide d'une valeur moyenne obtenue à partir de simulations. On commence par une petite valeur de n afin de pouvoir exploiter un arbre de probabilité et obtenir à la main la valeur exacte de l'espérance.

L'étape 1 permet, à l'aide de simulations simples, de réinvestir les notions de fluctuation d'échantillonnage et de stabilisation des fréquences étudiées en classe de Seconde.

L'étape 2 revient sur l'utilisation d'un arbre pour calculer des probabilités. Elle peut être l'occasion, au choix de l'enseignant, d'introduire ou de réinvestir le dénombrement des chemins dans un arbre et conduit au calcul de l'espérance d'une loi binomiale (la valeur de p a été choisie de manière à obtenir la valeur exacte de cette espérance).

L'étape 3 formalise les résultats obtenus à l'étape 2.

L'étape 4 propose plusieurs questions et prolongements permettant le cas échéant de prendre en compte l'hétérogénéité de la classe.

Pistes d’activités

Exemples d’organisation

Scénario 1

En salle informatique afin de disposer d'un tableur et d'un logiciel de calcul formel pour les étapes 1 et 3.

En classe avec un système de visualisation collective, les élèves utilisant les fonctions de leurs calculatrices pour les étapes 2 et 4.

Scénario 2

En classe avec un système de visualisation collective, les élèves utilisant des programmes et les fonctions de leurs calculatrices. Une utilisation des listes sera dans ce cas indispensable.

Énoncé

Une société souhaite agrandir un important centre d'appels et doit pour cela recruter 30 téléconseillers. Le responsable du recrutement fait passer des tests à 900 candidats, avant un entretien d'embauche.

L'une des épreuves consiste à appeler 3 personnes tirées au hasard dans un gros fichier pour leur demander de répondre à un questionnaire.

Le responsable du recrutement sait qu'en moyenne sur le centre d’appel un téléconseiller obtient dans un cas sur cinq que la personne appelée accepte de répondre.

Un centre d’appels

L'épreuve est réussie si au moins 2 des 3 personnes appelées par le candidat au recrutement acceptent de répondre.
Les candidats ainsi sélectionnés seront convoqués à un entretien d'embauche.

Il s'agit d’étudier la réussite à ce test avec la même performance que les téléconseillers déjà en poste, puis de calculer la probabilité pour le recruteur d'avoir sélectionné un nombre suffisant de candidats.

Étape 1 : Simulations de ce test

Afin de conjecturer la probabilité de réussite à ce test avec la même performance que les téléconseillers déjà en poste, on peut simuler ce test à l'aide d'un tableur.

Une démarche possible consiste à :

- créer une feuille de calcul permettant de simuler le test pour un candidat :

Appel N°1	Appel N°2	Appel N°3	Nombre de réponses obtenues
0	0	0	0

=SI(ALEA()<0,2;1;0)

Remarque : les formules SI(ALEA()<p;1;0), SI(ALEA()<=p;1;0) et ENT(ALEA()+p) permettent toutes de simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*.

- simuler le test pour 900 candidats et afficher un bilan du nombre de candidats retenus

	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Appel N°2	Appel N°3	Nombre de réponses obtenues					
2	0	0	0		Candidats retenus :	97		
3	1	0	2					
4	0	0	0					
5	1	0	1					

=NB.SI(E2:E901;2)+NB.SI(E2:E901;3)

- observer la fluctuation des résultats sur une dizaine de simulations (F9)
- calculer le nombre moyen de personnes acceptant de répondre pour les 900 candidats. (=SOMME(E2 :E901)/900) et observer la fluctuation de cette moyenne.

On peut également :

- créer à l'aide d'une calculatrice une liste simulant le nombre de personnes acceptant de répondre pour les 900 candidats et déterminer le nombre de candidats retenus.

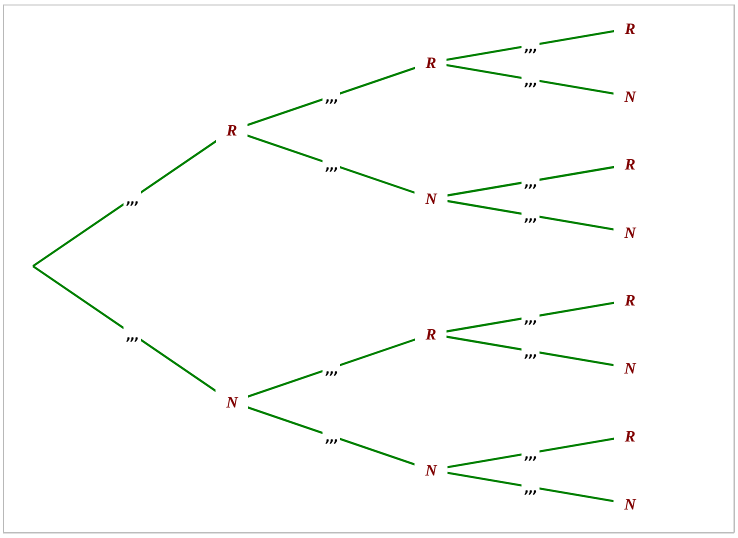
En prolongement, dans le cadre d'une différenciation, on peut créer sur calculatrice un programme calculant le nombre de candidats retenus sur n candidats et donner une estimation du nombre de candidats à tester pour avoir de « bonnes chances » (par exemple 95% de chances) de sélectionner 30 candidats.

Étape 2 : Calcul du nombre moyen de personnes acceptant de répondre

La grande taille du fichier permet de considérer que les 3 appels successifs sont indépendants.

La complétion de l'arbre ci-dessous où R est l'événement « la personne appelée a accepté de répondre » et N l'événement contraire de R, permet de calculer diverses probabilités :

- la probabilité de l'événement RRN ;
- la probabilité de l'événement RNR ;
- la probabilité d'obtenir une seule acceptation de répondre.



On peut alors en notant X le nombre de réponses positives, compléter le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

On peut alors calculer l'expression $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)$, appelée espérance mathématique du nombre d'acceptations de répondre, puis comparer la valeur de cette espérance au résultat obtenu sur la feuille de calcul simulant les appels des 900 candidats.

On pourra alors admettre que cette espérance mathématique est le nombre moyen de personnes acceptant de répondre lors d'un grand nombre de séries de trois appels.

Étape 3 : Utilisation d'une loi binomiale

En appelant « Succès » le fait qu'une personne appelée réponde au questionnaire, et en notant p la probabilité d'un succès (on pourra dans cette partie faire varier p, qui ne sera donc plus nécessairement égal à 0,2), il est alors possible de montrer que le nombre de personnes acceptant de répondre par candidat suit une loi binomiale dont on peut préciser les paramètres.

On pourra alors, en construisant un nouvel arbre, exprimer $P(X = k)$ en fonction de p, pour k variant de 0 à 3.

Cela permet ensuite de donner, en fonction de p, la probabilité qu'un candidat réussisse le test, puis de passer à l'usage d'un logiciel.

Solution :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

La probabilité qu'un candidat réussisse le test est donc $P(X = 2) + P(X = 3) = 3p^2(1 - p) + p^3$

Par exemple, le calcul suivant réalisé à l'aide du logiciel Xcas :

```
1 0*p^0*(1-p)^3+1*3*p^1*(1-p)^2+2*3*p^2*(1-p)^1+3*p^3*(1-p)^0
      3*p*(1-p)^2+6*p^2*(1-p)+3*p^3
2 simplify(0*p^0*(1-p)^3+1*3*p^1*(1-p)^2+2*3*p^2*(1-p)^1+3*p^3*(1-p)^0)
      3*p
```

peut faire l'objet d'une explication, et d'une interprétation en lien avec les résultats des étapes 1 et 2.

Il est alors possible de généraliser les résultats obtenus pour obtenir l'espérance de la loi binomiale $B(n ; p)$.

La fonction LOI.BINOMIALE des tableurs permet de calculer directement la probabilité de k succès lors de la répétition de n épreuves identiques et indépendantes.

La syntaxe de cette fonction est :

LOI.BINOMIALE(k ; nb de tentatives ; probabilité du succès; 0) pour obtenir la probabilité $P(X = k)$ où k est le nombre de succès, et

LOI.BINOMIALE(k ; nb de tentatives ; probabilité du succès ; 1) pour obtenir la probabilité $P(X \leq k)$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
p =	0,2		k	P(X=k)	k*P(X=k)		E(X) =	0,6
			0	0,51	0			
			1	0,38	0,38			
			2	0,1	0,19			
			3	0,01	0,02			

La création d'une feuille de calcul sur le modèle suivant :

- formule en E2 : = LOI.BINOMIALE(D2;B1;B2;0)
- formule en E3 : = D2*E2
- formule en I1 : = SOMME(F2:F902)

Elle ouvre à des interrogations classiques sur les formules recopiables à entrer en E2 et F2, et au calcul de $E(X)$.

On pourra alors, en faisant varier la valeur de p, utiliser cette feuille de calcul pour trouver l'espérance de la loi binomiale de paramètres 3 et p, puis émettre une conjecture concernant l'espérance de la loi $B(n ; p)$.

Une feuille de calcul construite sur le même principe permet, en faisant varier n et p, de consolider cette conjecture.

Étape 4 : Recrutement de 30 personnes

En appelant maintenant « Succès » le fait qu'un candidat ait réussi le test, il est alors possible de vérifier que la probabilité d'un succès est $p' = 0{,}104$ et de revenir à la situation initiale des 900 candidats.

On note alors Y le nombre de succès obtenus parmi les 900 candidats.

On peut ainsi s'interroger sur :

- le nombre de candidats que l'on peut, en moyenne, espérer sélectionner ; $E(Y) = 900 \times 0{,}104 = 93{,}6$ soit entre 93 et 94 candidats
- la probabilité que le nombre de candidats réussissant le test soit égal à 90 : $P(Y = 90) \approx 0{,}04$.
- la probabilité que le nombre de candidats réussissant le test soit strictement inférieur à 30 (le nombre de personnes sélectionnées serait alors insuffisant) : $P(Y < 30) \approx 4 \times 10 - 16$.
- la probabilité que le nombre de candidats réussissant le test soit strictement supérieur à 120 (le nombre d'entretien d'embauche pourrait alors être jugé excessif) :
  $P(Y > 120) = 1 - P(Y \leq 120) \approx 0{,}002$.
- la recherche d'un intervalle contenant le nombre de candidats sélectionnés dans environ 95 % des cas, c'est-à-dire la recherche de deux entiers a et b tels que $P(a \leq Y \leq b) \approx 0{,}95$, avec $P(X < a) < 0{,}025$ et $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.
  L'extrait de table ci-dessus permet de constater que $P(Y < 76) < 0{,}025$ et $P(Y \leq 112) \geq 0{,}975$, d'où l'on déduit : $P(76 \leq Y \leq 112) \geq 0{,}95$.

Nombre de succès	P(X<=k)
0	1,1946E-043
1	1,2598E-041
...	...
74	0,016197721
75	0,021537855
76	0,028266348
77	0,03662391
...	...
110	0,965141505
111	0,972417162
112	0,978366334
113	0,983181704
...	...

Remarque : Toutes ces réponses peuvent également être obtenues à l'aide d'une calculatrice.