

Dérivation : parabole et raccordement à l'aide de tangentes

Contexte pédagogique

Objectifs

- Calculer un nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente.
- Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré.
- Utiliser une feuille automatisée de calcul dans le cadre de la résolution de problèmes.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

[Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012](#)

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Application : nombre dérivé, tangente.	<ul style="list-style-type: none"> • Calculer le nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente. • Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré. • Tracer une tangente. 	La tangente en un point K d'abscisse x_K est définie comme la droite passant par K de coefficient directeur $f'(x_K)$.
Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3.	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3. 	

Prérequis, capacités

- Équation réduite d'une droite.
- Symétrie orthogonale par rapport à une droite.
- Résolution d'un système d'équations linéaires.

Utilisations d'outils logiciels :

- Adressage relatif.
- Insertion d'un graphique.

Les intentions

L'un des intérêts des tangentes est de permettre de raccorder deux courbes en un point sans « cassure » : il suffit que ces deux courbes aient la même tangente en ce point.

L'activité propose :

- trois façons d'étudier le raccordement d'une parabole et d'une droite,
- l'étude de la jonction de deux paraboles, avec, pour prolongement, l'étude d'une fonction polynôme de degré 3,
- puis quelques exemples supplémentaires de raccordement de courbes.

Cette notion de jonction des deux courbes est aussi traitée dans un document ressources de la série STD2A, intitulé « Arcs en architecture ».

Ce document est disponible sur internet à l'adresse : <http://eduscol.education.fr/ressources-maths>.

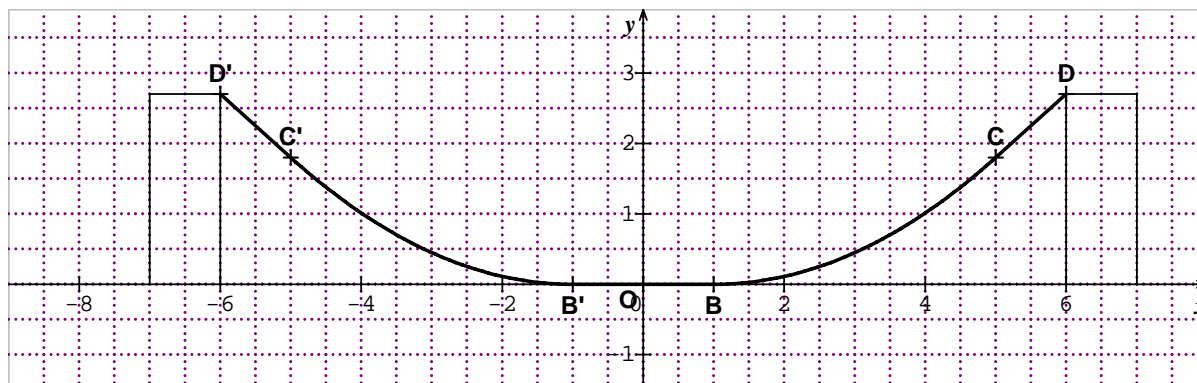
Ce document propose des séquences pour étudier trois formes d'arcs complexes : lors de ces séquences, on en vient à étudier différents problèmes de raccordement de courbes : raccordement de deux arcs de cercle, raccordement d'un arc de cercle et d'une droite ...

Exemples d'activités

Raccordement d'une parabole et d'une droite : profil d'une piste de skate-board.

Présentation du problème

Pour illustrer le cas du prolongement d'une parabole par une droite, on peut utiliser le profil d'une piste de skate-board donné ci-dessous.



D'après un sujet de Bac professionnel Travaux publics 2006

- Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- Les points B, C et D ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (5 ; 1,8) et (6 ; 2,7).
- La courbe reliant les points B et C est la courbe représentative de la restriction à l'intervalle [1 ; 5] de la fonction f définie sur \mathbf{R} par :
$$f(x) = 0,1125(x - 1)^2$$

soit
$$f(x) = 0,1125x^2 - 0,225x + 0,1125.$$
- [OB] et [CD] sont des segments.

Afin que le mouvement du skate-board sur la piste reste fluide et sans accroc, les prolongements rectilignes [OB] et [CD] sont construits à partir des tangentes à la courbe représentative de f aux points B et C.

Remarque :

Les points B', C' et D' ont donc pour coordonnées respectives (-1 ; 0), (-5 ; 1,8) et (-6 ; 2,7).

La courbe reliant les points B' et C' est la courbe représentative de la restriction à l'intervalle [-5 ; -1] de la fonction g définie sur \mathbf{R} par :

$$g(x) = 0,1125(x + 1)^2$$

soit

$$g(x) = 0,1125x^2 + 0,225x + 0,1125.$$

On peut envisager plusieurs utilisations de cet exemple :

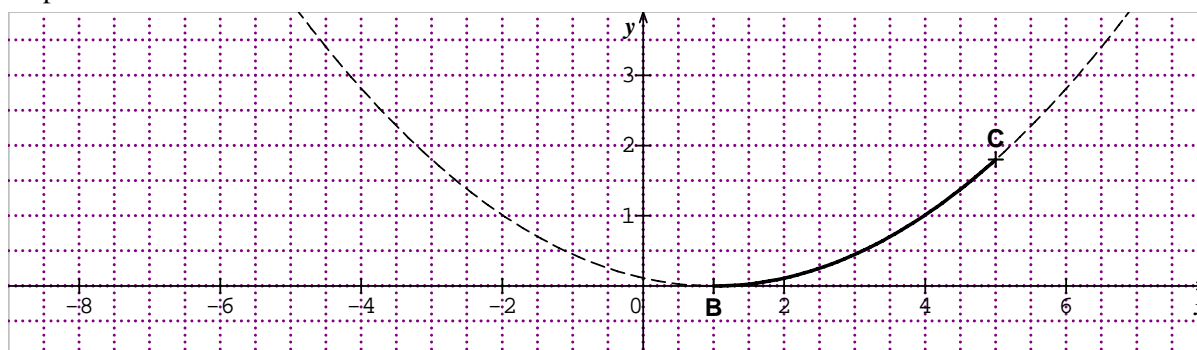
- Travailler sur le tracé de droites en réalisant la construction à la main de la piste de skateboard. Les tangentes peuvent être tracées soit à partir de leur équation réduite, ce qui donne aussi l'occasion de faire chercher l'équation réduite de la tangente, soit à partir d'un point et de leur coefficient directeur.
- Revenir sur la recherche d'équations de droites à partir de la donnée des coordonnées de deux points. Déterminer les équations des droites (OB) et (CD) permet de vérifier que le profil de cette piste utilise bien les tangentes à la courbe représentative de f pour prolonger la partie incurvée sans cassure.
- Utiliser le tableau pour tracer ce profil. Il sera alors nécessaire de compléter un tableau en plusieurs parties (chacune correspondant à une partie du tracé de la piste).

Application 1 – Construction de la piste de skate-board

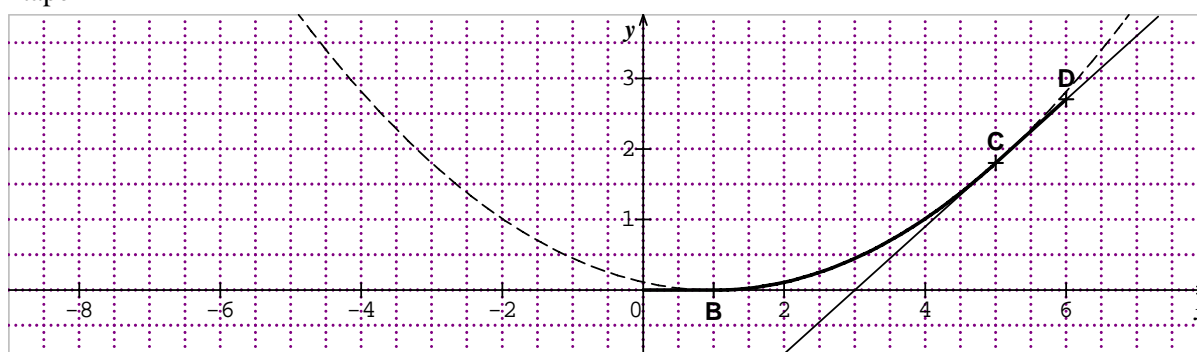
Après avoir donné aux élèves l'expression de la fonction f et le tracé de sa courbe représentative C_f (sur papier millimétré dans un repère orthonormal, d'unités graphiques 2 cm, par exemple), on peut leur demander :

1. de placer sur la courbe C_f les points B et C d'abscisses respectives 1 et 5 et de limiter le tracé de la courbe C_f à l'intervalle $[1 ; 5]$ (Étape 1) ;
2. de tracer ensuite (Étape 2) les tangentes à la courbe C_f aux points B et C :
soit en déterminant les équations des tangentes ;
soit en partant des points B et C et en utilisant leur coefficient directeur (respectivement 0 et 1) ;
puis de placer le point D d'abscisse 6 appartenant à la tangente à la courbe C_f au point C ;
3. puis enfin, après avoir limité le tracé de la piste de skate-board à l'intervalle $[0 ; 6]$, de le compléter par symétrie par rapport à l'axe (Oy) (Étape 3).

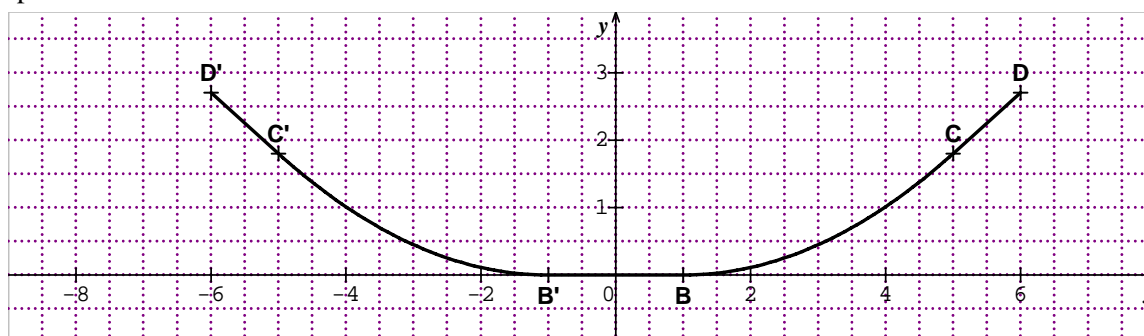
Étape 1



Étape 2



Étape 3



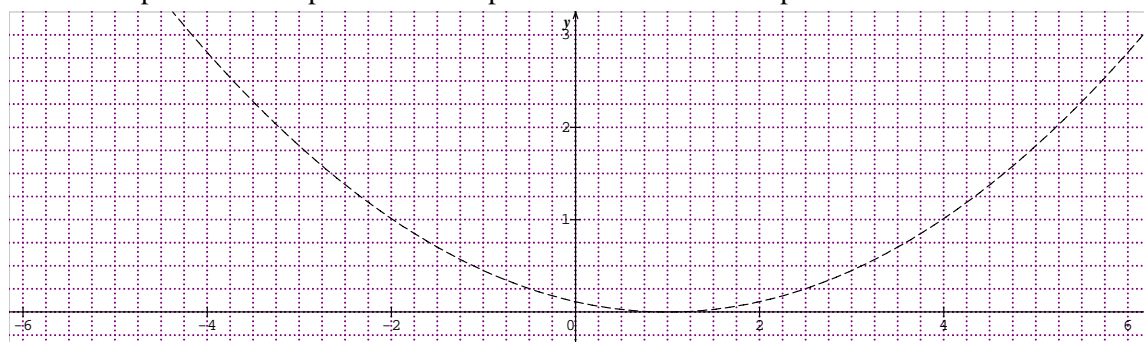
Exemple d'énoncé :

On va réaliser le tracé de la piste de skate-board vue précédemment.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

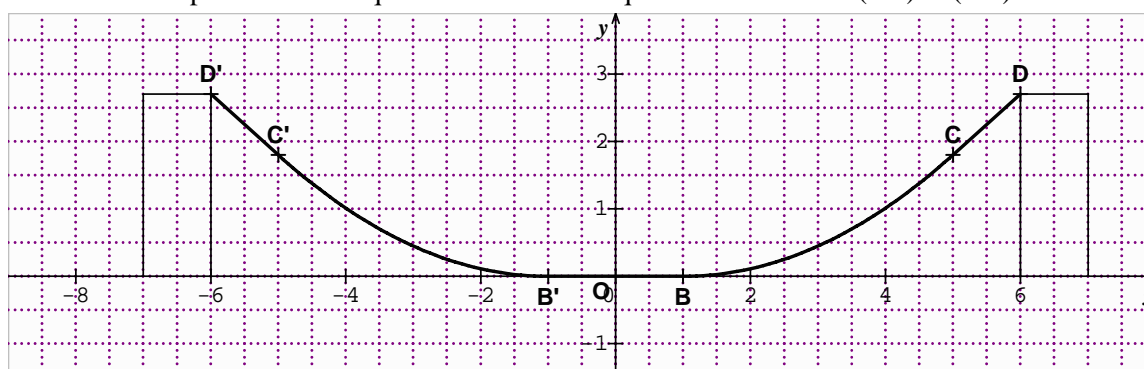
On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0,1125x^2 - 0,225x + 0,1125$. On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Calculer $f(1)$ et $f(5)$ puis $f'(1)$ et $f'(5)$.
2. Tracer dans le repère ci-dessous la tangente en B à C_f et la tangente en C à C_f .
3. Compléter le tracé pour obtenir la piste de skate-board complète.



Application 2 – Vérification de l'utilisation des tangentes

Étant donné le tracé de la piste de skate-board, les coordonnées des points B, C et D ainsi que l'expression de la fonction f , on détermine les équations des tangentes à la courbe aux points d'abscisses 1 et 5 puis on vérifie que ce sont bien les équations des droites (OB) et (CD).



Exemple d'énoncé :

La courbe ci-dessus est symétrique par rapport à la droite (Oy).

On a : $B(1 ; 0)$ $C(5 ; 1,8)$ $D(6 ; 2,7)$.

La courbe reliant B à C est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 5]$ par :

$$f(x) = 0,1125x^2 - 0,225x + 0,1125.$$

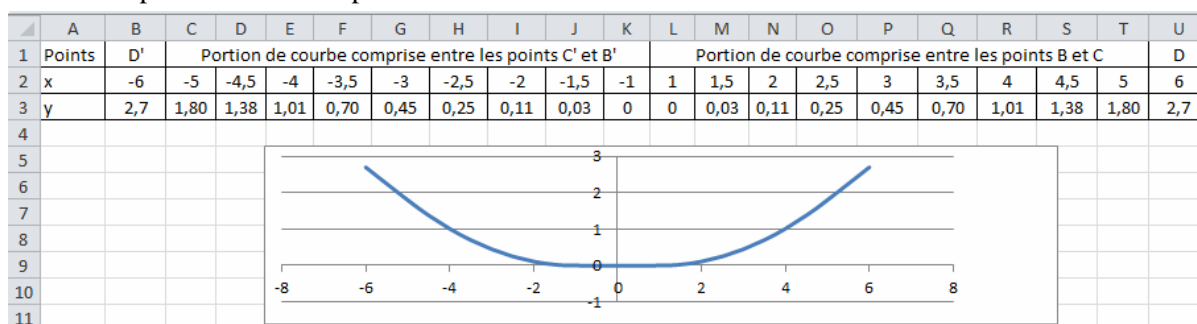
1. Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses 1 et 5.
2. Déterminer les équations réduites des droites (OB) et (CD). Que constate-t-on ?

Application 3 – Tracé de la piste à l'aide d'un tableur

On complète un tableau de valeurs pour tracer la courbe sur tableur.

Ce tableau se décompose en quatre parties :

- Le point D' est défini par ses coordonnées ;
- La portion de courbe comprise entre les points C' et B' est définie à l'aide de la fonction g : on entre la formule $=0,1125*(C2+1)^2$ dans la cellule C3 et on recopie vers la droite jusqu'à la cellule K3 ;
- La portion de courbe comprise entre les points B et C est définie à l'aide de la fonction f : on entre la formule $=0,1125*(L2-1)^2$ dans la cellule L2 et on recopie vers la droite jusqu'à la cellule T3 ;
- Le point D est défini par ses coordonnées.



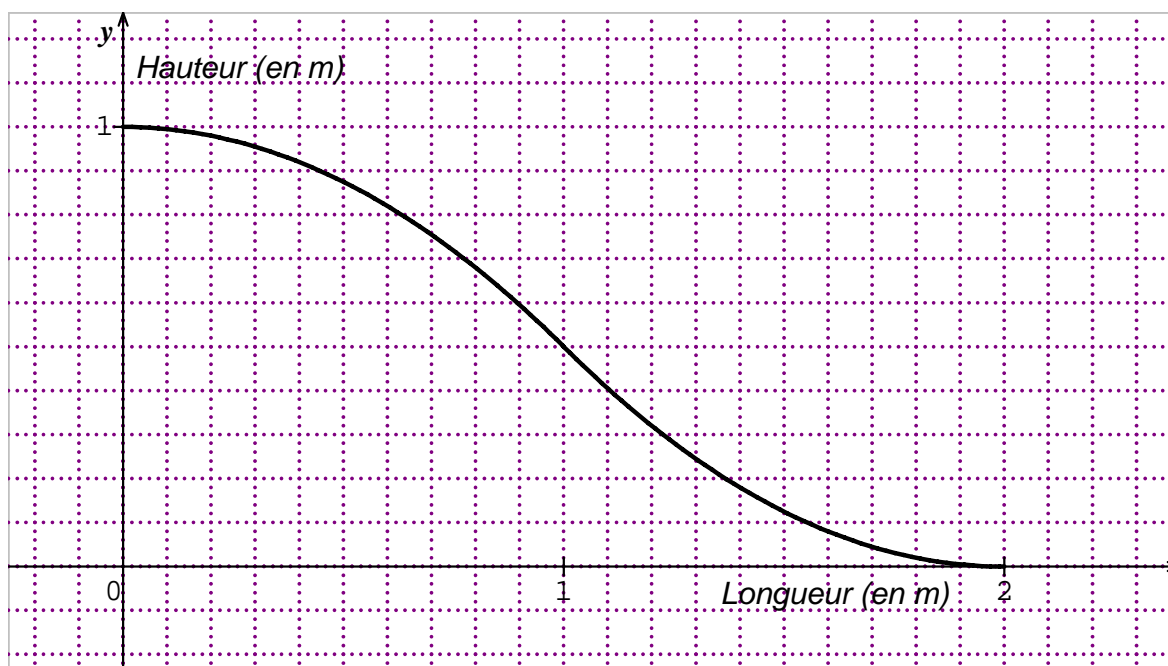
Après avoir sélectionné les lignes 2 et 3, on insère un graphique de type « nuage de points » pour représenter la piste de skateboard ainsi définie.

Raccordement de deux parabolles : profil d'un toboggan

Présentation du problème

L'étude du profil d'un toboggan permet de s'intéresser au raccordement de deux parabolles.

Voici un exemple de profil de toboggan :



Cette courbe est constituée de deux portions de parabolles représentant deux fonctions : la première est définie sur $[0 ; 1]$ et la seconde est définie sur $[1 ; 2]$.

On introduit la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a , b , et c sont des réels, a étant non nul) et la fonction g définie sur $[1 ; 2]$ par $g(x) = dx^2 + ex + k$ (où d , e , et k sont des réels, d étant non nul).

Les contraintes, que l'on peut faire découvrir par les élèves, sont les suivantes :

- tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(0 ; 1)$ et $(2 ; 0)$;
- les deux portions de parabole admettent la même tangente au point de «raccordement», qui, dans cet exemple, a pour abscisse 1.

En utilisant le fait que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, on obtient $f(x) = ax^2 + 1$.

En utilisant le fait que $g(2) = 0$ et $g'(2) = 0$, on obtient $g(x) = dx^2 - 4dx + 4d$.

Les deux portions de courbe ayant la même tangente au point d'abscisse 1 :

- on a $f'(1) = g'(1)$ donc $a = -d$;
- de plus $f(1) = g(1)$ donc $a = -0,5$.

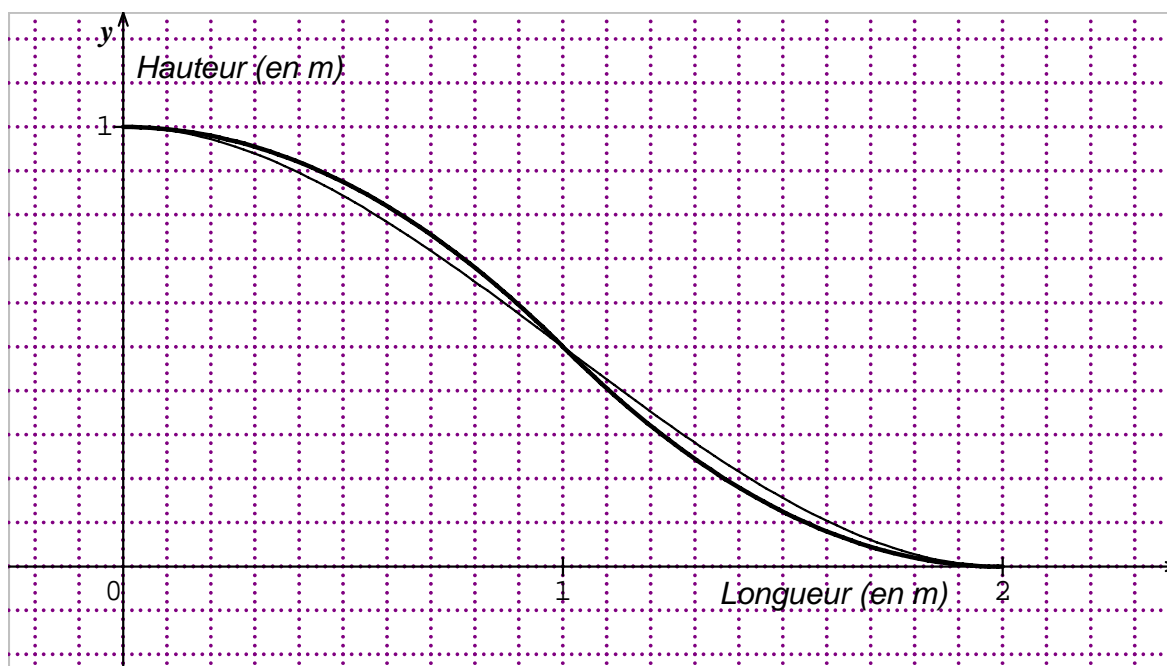
On a donc $f(x) = -0,5x^2 + 1$ et $g(x) = 0,5x^2 - 2x + 2$.

Prolongement

On peut poursuivre cette activité en modélisant le profil du toboggan avec une fonction h polynôme du troisième degré définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ qui doit vérifier :

- $h(0) = 1$, $h(2) = 0$
- $h'(0) = 0$ et $h'(2) = 0$.

On a $h(x) = 0,25x^3 - 0,75x^2 + 1$.



Autres illustrations

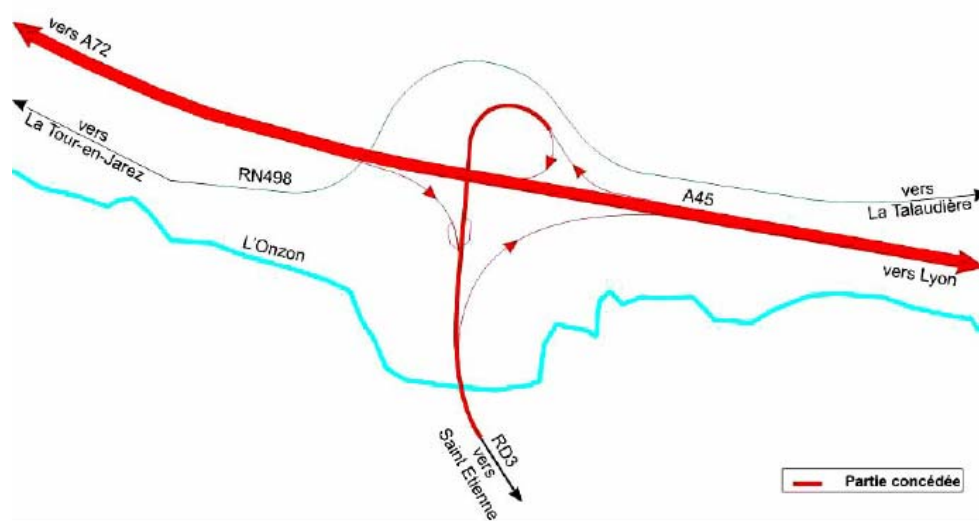
Les raccordements réalisés à l'aide d'une tangente commune au point de jonction se retrouvent dans bien d'autres situations :

- tremplin et piste d'atterrissage pour le saut à ski ;
- bretelle d'accès sur autoroute, rails des chemins de fer notamment, « montagnes russes » : raccordement droite-clothoïde.

Pour information, une clothoïde (ou « spirale de Cornu ») est une courbe que l'on utilise dans les tracés des autoroutes, des voies ferrées, des boucles verticales des « montagnes russes »...

On trouvera des applications de cette courbe à l'adresse <http://fr.wikipedia.org/wiki/Clothoïde> et une animation à l'adresse <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/clotho.html>

Schéma de l'échangeur de l'A 45 avec la RD 3 (Avant Projet)



Source : www.a45.fr/IMG/pdf/18_echange.pdf

Photo d'aiguillages :



Source : wikimedia