Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3

Contexte pédagogique

Objectifs

Dans le cadre d'une résolution de problèmes :

- Exploiter les fonctions polynômes et leurs dérivées.
- Utiliser les outils logiciels.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3. Application à l'étude des variations de la fonction.	• Déterminer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3. • Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser le signe de la fonction dérivée pour déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 3.	On pourra commencer par conjecturer les variations d'une fonction polynôme de degré 3 à l'aide de la calculatrice graphique ou du tableur. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations issues des autres disciplines (résolutions graphiques ou numériques d'équations et d'inéquations, problèmes d'optimisation…)

Prérequis, capacités

- Travail de seconde sur les fonctions
- Fonctions affines et polynômes de degré 2 ou 3
- Lien entre le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f.

Les intentions

L'activité présente deux exemples.

Le premier exemple étudie, en situation de concurrence pure et parfaite, un résultat d'exploitation : comparaison du chiffre d'affaires et du coût de production, étude aboutissant à la recherche du bénéfice maximal.

Le deuxième exemple étudie, en situation de monopole, une fonction de demande ainsi que la recherche du prix de vente unitaire permettant le bénéfice maximal.

En liaison avec le domaine économique, seront mis en œuvre les points suivants :

- Tracé de courbes et interprétations graphiques
- Résolution d'équations et d'inéquations : algébriquement, graphiquement ou à l'aide du tableur
- Utilisation du signe de la dérivée pour déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 3
- Problèmes d'optimisation.

Exemples d'activités

Activité 1 : situation de concurrence

Sous l'hypothèse de concurrence pure et parfaite, le prix de vente unitaire p d'un produit est imposé à l'entreprise par le marché : c'est l'équilibre du marché qui fixe le prix, à ce prix l'entreprise vend toute sa production.

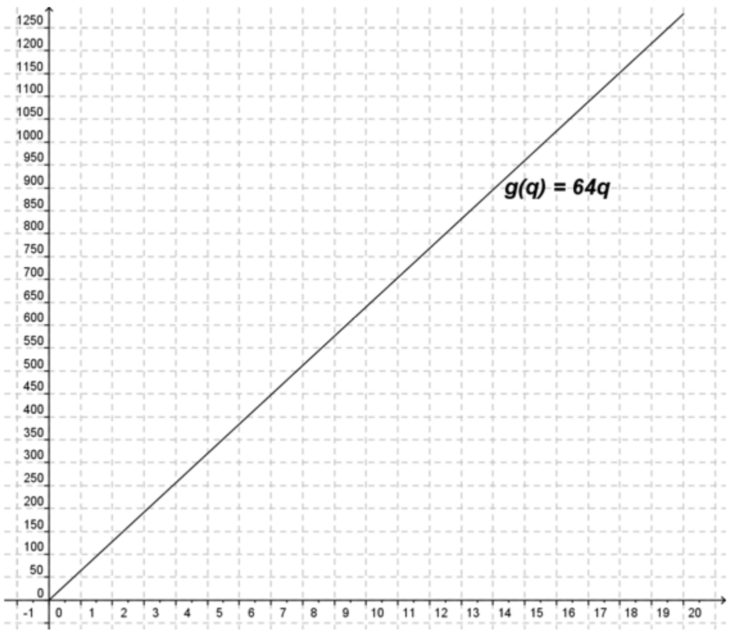
Étude du chiffre d'affaires

En situation de concurrence pure et parfaite, le chiffre d'affaires de l'entreprise est proportionnel à la quantité q produite et donc égal à pq.

La fonction $g : q \mapsto pq$ est une fonction linéaire représentée par une droite, appelée droite de recette.

Considérons par exemple une entreprise dont la production mensuelle est de q milliers d'unités, avec $q \in [0 ; 20]$; le prix de vente d'un millier d'unités est fixé à 64 centaines d'euros et on suppose que toute la production est vendue.

Notons $g(q)$ le chiffre d'affaires mensuel de l'entreprise lorsqu'elle produit q milliers d'unités ; on a alors $g(q) = 64q$ (en centaines d'euros).



Étude du coût total de fabrication

Le coût total de fabrication est lui aussi une fonction f de la quantité produite.

La fonction f est nécessairement positive, avec $f(0) > 0$: en effet $f(0)$ est le coût fixe, incompressible même en l'absence de production (locations, équipements, amortissements…).

Le coût variable $f(q) - f(0)$ quant à lui fait intervenir les matières premières et le travail.

La fonction f est aussi croissante : si $q_2 > q_1$, pour produire q_2 il a déjà fallu produire q_1, donc $f(q_2) \geq f(q_1)$.

Le calcul, pour tout nombre positif q, du nombre $f'(q)$ et la détermination de son signe sont alors des outils efficaces pour l'étude du sens de variation de la fonction f :

Supposons par exemple que la fonction de coût total f soit donnée en centaines d'euros par :

$$f(q) = \frac{1}{3}q^3 + 160.$$

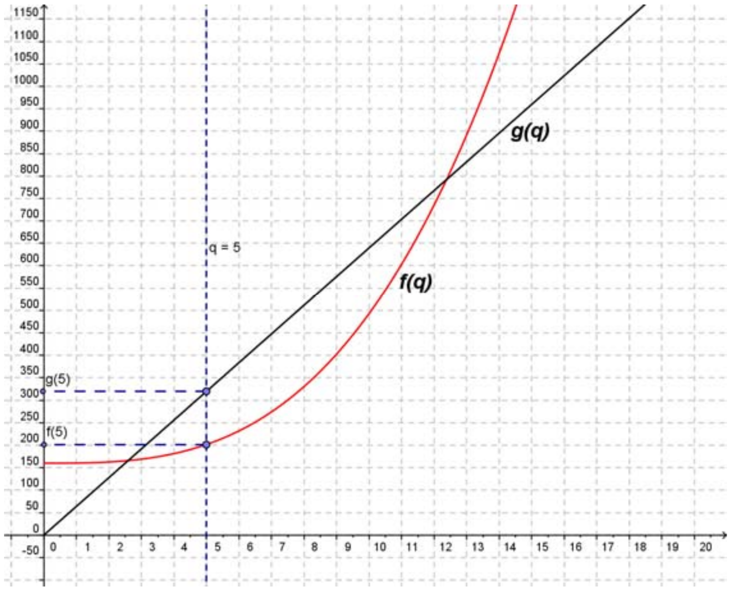
Le montant des frais fixes de l'entreprise est alors $f(0) = 160$ centaines d'euros.

De plus, $f'(q) = q^2$: le nombre $f'(q)$ est positif donc f est croissante sur l'intervalle [0 ; 20].

La représentation graphique de la fonction f dans le repère précédent permet ensuite, par exemple, de vérifier le montant des frais fixes et de déterminer approximativement le chiffre d'affaires et le coût total pour des valeurs de q choisies :

Ainsi par exemple pour une production de 5 000 unités on a : $g(5) = 320$ et $f(5) \approx 202$.

Le chiffre d'affaires est alors égal à 32 000 euros et le coût total à environ 20 200 euros.



Il peut être intéressant de comparer les approches graphique (courbe) et numérique (table de valeurs) pour la résolution d'équations et d'inéquations, donnant ainsi du sens à la notion de fonction.

On peut tout d'abord réaliser une feuille automatisée de calcul affichant les valeurs de q, de $g(q)$ et de $f(q)$ sur trois colonnes.

On notera au passage que l'on retrouve le résultat précédent : $g(5) = 320$ et $f(5) \approx 202$.

Á partir du tableur on détermine ensuite, par exemple, la quantité q correspondant à un coût total de 600 centaines d'euros. Le résultat est obtenu par balayage, en utilisant d'abord un pas égal à 1, puis à 0,1 et enfin à 0,01 :

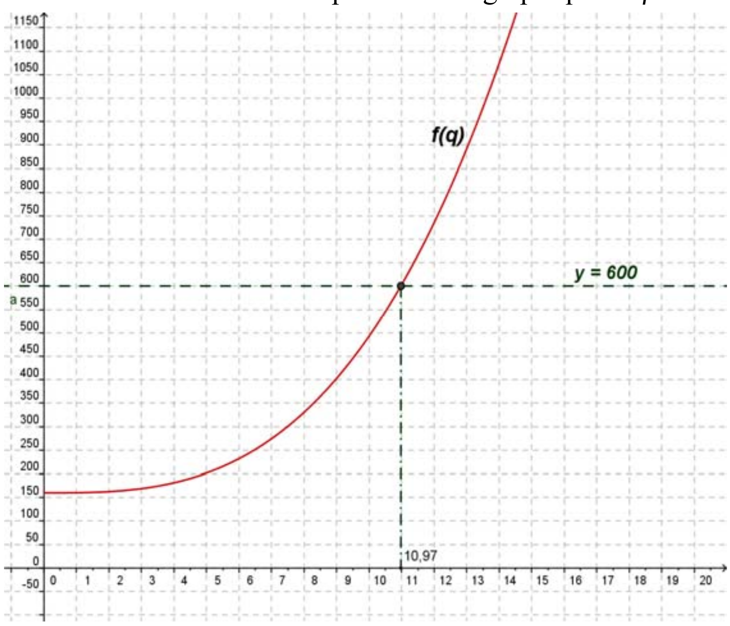
q	$g(q)$=64q	$f(q)$=(1/3)q^3+160
0	0	160
1	64	160
2	128	163
3	192	169
4	256	181
5	320	202
6	384	232
7	448	274
8	512	331
9	576	403
10	640	493
11	704	604
12	768	736
13	832	892
14	896	1075
15	960	1285
16	1024	1525
17	1088	1798
18	1152	2104
19	1216	2446
20	1280	2827

q	$f(q)$
10	493,3
10,1	503,4
10,2	513,7
10,3	524,2
10,4	535,0
10,5	545,9
10,6	557,0
10,7	568,3
10,8	579,9
10,9	591,7
11	603,7

q	$f(q)$
10,9	591,7
10,91	592,9
10,92	594,1
10,93	595,3
10,94	596,4
10,95	597,6
10,96	598,8
10,97	600,0
10,98	601,3
10,99	602,5
11	603,7

La quantité q correspondant à un coût total de 600 centaines d'euros est : $q \approx 10{,}97$ milliers d'unités.

Ce résultat peut être alors vérifié à l'aide de la représentation graphique de f :



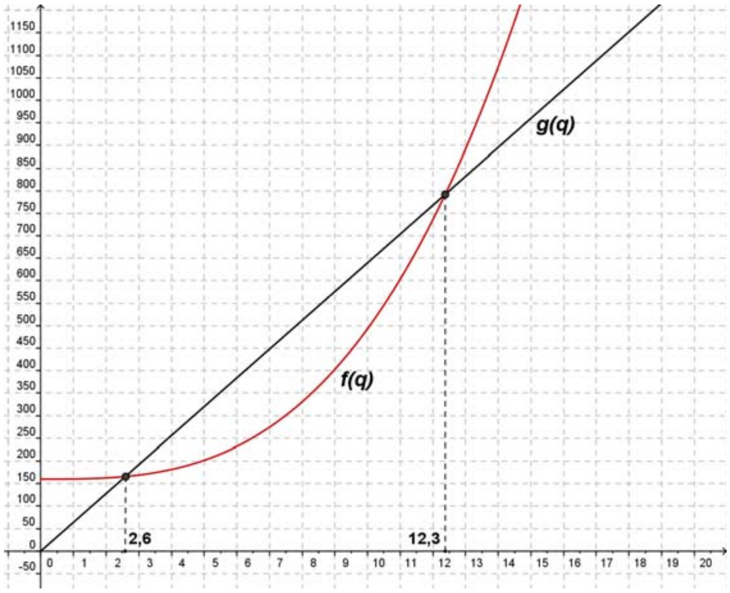
Étude du résultat d'exploitation

L'objectif est à présent de compléter les résultats précédents en déterminant pour quelles valeurs de q l'entreprise est bénéficiaire.

A l'aide du graphique, on détermine pour quelles valeurs de q l'entreprise est en situation de profit ou en situation de perte et on vérifie le résultat à l'aide du tableur en comparant les nombres $g(q)$ et $f(q)$.

Graphiquement, l'entreprise est en situation de profit lorsque C_g est au-dessus de C_f .

C'est le cas lorsque $3 < q < 12$ et plus précisément lorsque $2{,}6 < q < 12{,}3$.



Algébriquement cela signifie que $g(q) > f(q)$:

q	$g(q)$=64q	$f(q)$=(1/3)q^3+160
0	0	160
1	64	160
2	128	163
3	192	169
4	256	181
5	320	202
6	384	232
7	448	274
8	512	331
9	576	403
10	640	493
11	704	604
12	768	736
13	832	892
14	896	1075

q	$g(q)$	$f(q)$
2	128,0	162,7
2,1	134,4	163,1
2,2	140,8	163,5
2,3	147,2	164,1
2,4	153,6	164,6
2,5	160,0	165,2
2,6	166,4	165,9
2,7	172,8	166,6
2,8	179,2	167,3
2,9	185,6	168,1
3	192,0	169,0

q	$g(q)$	$f(q)$
12	768,0	736,0
12,1	774,4	750,5
12,2	780,8	765,3
12,3	787,2	780,3
12,4	793,6	795,5
12,5	800,0	811,0
12,6	806,4	826,8
12,7	812,8	842,8
12,8	819,2	859,1
12,9	825,6	875,6

Il est alors naturel d'introduire la fonction h donnant, en fonction de la quantité q, le résultat d'exploitation :

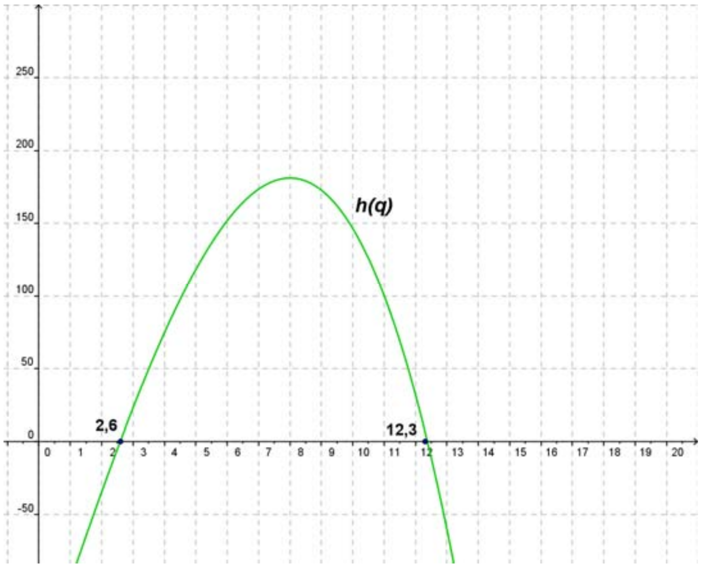
On a l'égalité : $h(q) = g(q) - f(q)$, soit $h(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 64q - 160$

Le calcul du nombre $h'(q)$, pour tout réel positif q, donne le sens de variation de la fonction h :

Pour tout réel positif q, $h'(q) = -q^2 + 64$, soit $h'(q) = (8 + q)(8 - q)$.
Or $8 + q > 0$, donc $h'(q)$ est du signe de $8 - q$: $h'(q) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq q \leq 8$
donc la fonction h est croissante sur l'intervalle $[0 ; 8]$ et décroissante sur l'intervalle $[8 ; 20]$.

La représentation graphique de la fonction h permet de retrouver l'intervalle de rentabilité :

L'entreprise est en situation de profit lorsque la fonction h est positive, c'est-à-dire lorsque sa courbe C_h est au-dessus de l'axe des abscisses, ce qui est le cas sur l'intervalle $[2,6 ; 12,3]$:



On obtient dès lors la valeur de q qui permet le bénéfice maximal :

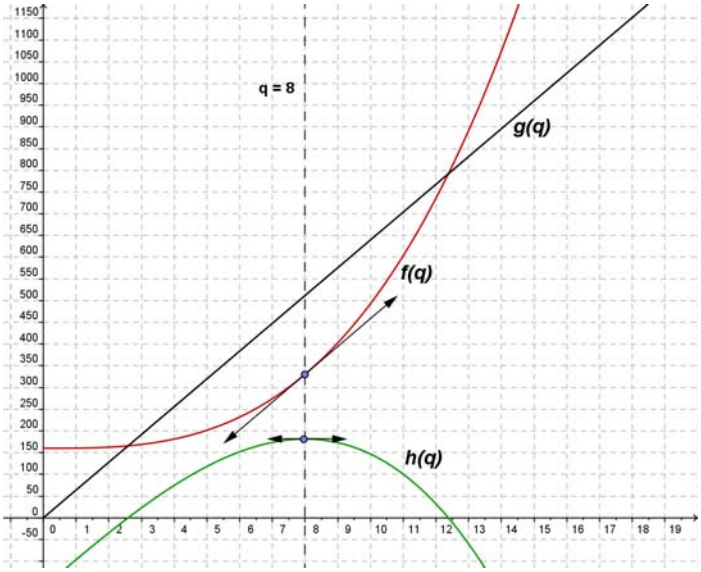
La fonction h admet sur l'intervalle $[0 ; 20]$ un maximum en $q = 8$, donc le profit est maximal pour $q = 8$ milliers d'unités et vaut $h(8) \approx 181,3$ centaines d'euros.

On constate que le profit est maximal quand le coût marginal $f'(q)$ est égal au prix de vente unitaire :

En effet, le profit est : $h(q) = 64q - f(q)$ donc $h'(q) = 64 - f'(q)$.
Par suite $h'(q) = 0 \Leftrightarrow f'(q) = 64$ et $f'(q) = 64 \Leftrightarrow q = 8$

Graphiquement, cela signifie qu'au point d'abscisse 8 sur C_f, la tangente est parallèle à la droite des recettes :

En effet, en ce point, on a $f'(q) = g'(q) = 64$.



En faisant apparaître une 4e colonne sur la feuille de calcul, on retrouve le résultat précédent à l'aide du tableur :

q	$g(q)$=64q	$f(q)$=(1/3)q^3+160	$h(q)=g(q)-f(q)$
0	0	160	-160
1	64	160	-96
2	128	163	-35
3	192	169	23
4	256	181	75
5	320	202	118
6	384	232	152
7	448	274	174
8	512	331	181
9	576	403	173
10	640	493	147
11	704	604	100
12	768	736	32
13	832	892	-60
14	896	1075	-179
15	960	1285	-325
16	1024	1525	-501
17	1088	1798	-710
18	1152	2104	-952
19	1216	2446	-1230
20	1280	2827	-1547

Le profit est maximal pour $q = 8$ milliers d'unités.

Activité 2 : cas d'un monopole

Les premiers économistes (Cantillon, Quesnay, Smith…) cherchant à expliquer comment se fixe le prix d'un produit sur un marché, ont observé que les producteurs proposaient une certaine quantité de ce produit (la quantité offerte ou offre) ; et les consommateurs demandaient une certaine quantité de ce produit (la quantité demandée ou demande).

La demande *d* est une fonction du prix, positive et décroissante et le coût total *C* une fonction de la quantité, positive et croissante.

En situation de concurrence, nous avons vu que c'est l'équilibre du marché qui fixe le prix.

Par contre, en situation de monopole pur, le producteur a un pouvoir de marché tel qu'il peut fixer son prix lui-même (on dit qu'il devient « price maker »).

Les consommateurs n'ont donc plus le choix mais la quantité demandée reste toujours fonction du prix de vente unitaire p du produit : une augmentation du prix unitaire entraîne une diminution de la demande.

La recette est toujours pq, mais n'est alors plus proportionnelle à la quantité, comme dans une situation de concurrence pure. Sa représentation graphique n'est donc plus une droite.

Étudions l'exemple suivant :

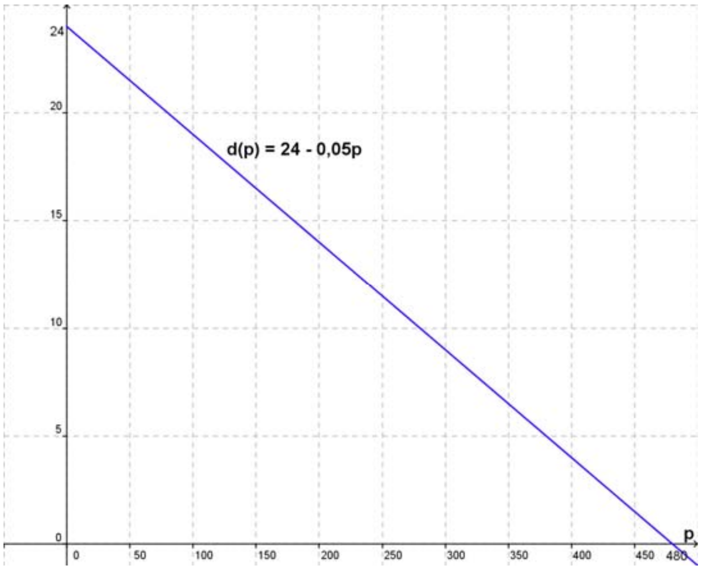
On considère une entreprise seule sur un marché pour fabriquer et vendre un produit. Pour fixer son prix unitaire p (en euros), elle dispose des informations suivantes :

La quantité produite q ne peut excéder 24 unités.

La fonction de demande d de ce produit est : $d(p) = 24 – 0{,}05p$

La fonction de coût total C est définie par : $C(q) = q^3 – 25q^2 + 280q + 400$

On peut dans un premier temps représenter graphiquement la fonction d de la variable p puis étudier son signe et son sens de variation :



La fonction affine d est décroissante car – 0,05 est strictement négatif.

Elle est positive lorsque $0{,}05p \leq 24$, soit $p \leq 480$

Après avoir exprimé p en fonction de q, on peut déterminer la recette $R(q)$ et étudier le sens de variation de la fonction R :

On a $p = \dfrac{24 - q}{0{,}05} = 480 - 20q$ et la recette $R(q)$ est : $R(q) = 480q - 20q^2$.

$R'(q) = 480 - 40q$ et $R'(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \leq 12$.

La fonction recette R est donc croissante sur l'intervalle [0 ;12] et décroissante sur l'intervalle [12 ;24].

On peut ensuite étudier le sens de variation de la fonction coût total C :

On a $C'(q) = 3q^2 - 50q + 280$, de discriminant $\Delta = -860$ soit $\Delta < 0$ donc $C'(q) > 0$

la fonction C est croissante sur l'intervalle [0 ;24].

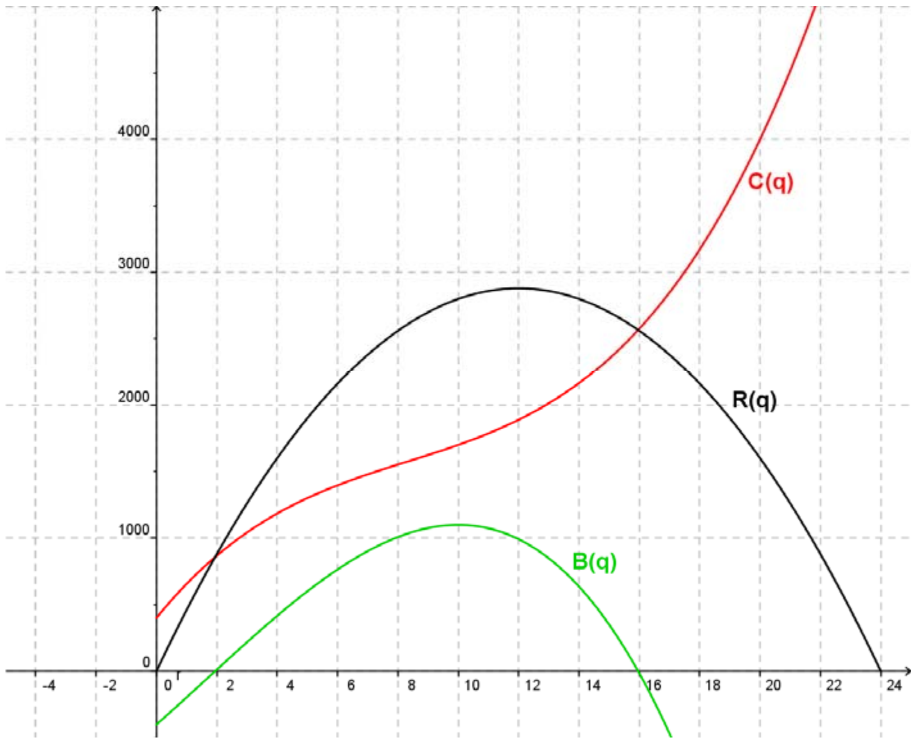
On peut enfin déterminer la fonction bénéfice B et étudier ses variations sur l'intervalle [0 ;24] :

On a $B(q) = R(q) - C(q) = -q^3 + 5q^2 + 200q - 400$.

D'où $B'(q) = -3q^2 + 10q + 200$

$\Delta = 2\,500$ donc $\Delta > 0$, les racines sont $q_1 = 10$ et $q_2 = -\dfrac{20}{3}$ donc $q_2 < 0$

La fonction bénéfice B est donc croissante sur l'intervalle [0 ;10] et décroissante sur l'intervalle [10 ;24].



Le signe de la fonction bénéfice B ne peut pas être obtenu par le calcul. La lecture du graphique ci-dessus permet d'obtenir le résultat :

Le graphique montre que l'entreprise est bénéficiaire pour les valeurs de q situées approximativement entre 2 et 16.

Le tableur s'avère ici être un outil intéressant pour préciser ce résultat et obtenir les prix p qui permettent un profit :

q	$p = 480 - 20q$	$R(q) = pq$	$C(q)$	$B(q)=R(q) - C(q)$
0	480	0	400	– 400
1	460	460	656	– 196
2	440	880	868	12
3	420	1260	1042	218
4	400	1600	1184	416
5	380	1900	1300	600
6	360	2160	1396	764
7	340	2380	1478	902
8	320	2560	1552	1008
9	300	2700	1624	1076
10	280	2800	1700	1100
11	260	2860	1786	1074
12	240	2880	1888	992
13	220	2860	2012	848
14	200	2800	2164	636
15	180	2700	2350	350
16	160	2560	2576	– 16
17	140	2380	2848	– 468
18	120	2160	3172	–1012
19	100	1900	3554	– 1654
20	80	1600	4000	– 2400
21	60	1260	4516	– 3256
22	40	880	5108	– 4228
23	20	460	5782	– 5322
24	0	0	6544	– 6544

Il y a profit lorsque le bénéfice $B(q)$ est positif, ce qui correspond à un prix p tel que $180 \leq p \leq 440$.

Le tableur ainsi que le graphique et l'étude des variations de la fonction bénéfice B donnent le bénéfice maximal :

Le bénéfice est maximal pour $q = 10$ unités et vaut $B(10) = 1\,100$ euros.

Le prix de vente unitaire correspondant s'obtient alors par le tableur ou le calcul :

$p = 480 - 20 \times 10 = 280$ euros