Dérivation : Approximation affine et applications aux évolutions successives

Contexte pédagogique

Objectifs

- Calculer un nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente.
- Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré.
- Découvrir l'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point.
- Constater que pour un taux d'évolution t « assez petit », deux évolutions successives de taux t peuvent être approchées par une évolution de taux $2t$.
- Étudier l'erreur commise en effectuant une telle approximation.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Application : nombre dérivé, tangente.	• Calculer le nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente. • Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré. • Tracer une tangente.	La tangente en un point K d'abscisse x_K est définie comme la droite passant par K de coefficient directeur $f'(x_K)$.

Prérequis, capacités

- Équation réduite d'une droite.
- Proportions.
- Évolutions successives, évolution globale.

Utilisation d'outils logiciels :

- Tracé de courbes sur la calculatrice, zoom.
- Adressage relatif, adressage absolu.

Les intentions

Il est possible de remplacer deux évolutions successives de taux t par une évolution de taux $2t$ pour t « assez petit ». Ce faisant, on effectue une approximation affine de la fonction $f(x) = (1 + x)^2$ au voisinage de 0 par sa tangente d'équation $y = 1 + 2x$.

Après avoir constaté la possibilité d'utiliser cette approximation affine, on étudiera l'erreur commise dans différents cas.

L'équation réduite de la tangente à une parabole permet d'obtenir une approximation affine du polynôme du second degré associé au voisinage d'un point. Afin de faire découvrir aux élèves la notion d'approximation affine, on peut leur faire constater que la parabole et la tangente sont très proches au voisinage du point considéré, que ce soit de manière graphique (calculatrice et zoom par exemple), à l'aide d'un tableau de valeurs (réalisé sur tableur ou calculatrice) ou par une étude théorique.

Présentation du problème

Si l'étude d'une approximation affine peut s'appliquer à toute fonction polynôme du second (ou du troisième) degré, il est également possible en choisissant la fonction considérée de faire un lien avec les évolutions successives, comme proposé ici.

Il est possible de remplacer deux évolutions successives de taux t (soit une évolution globale de coefficient multiplicateur $(1 + t)^2$) par une évolution de taux $2t$ (de coefficient multiplicateur $(1 + 2t)$) lorsque t est « suffisamment petit ». Les élèves ont d'ailleurs spontanément envie de faire cette approximation, et ce quelle que soit la valeur du taux d'évolution t considéré.

Pour justifier cette approximation, ou pour étudier l'erreur commise, on considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = (1 + x)^2,$$

$$\text{soit} \qquad f(x) = 1 + 2x + x^2.$$

(C) étant la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal, la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1 + 2x$.

L'approximation affine de f au voisinage de 0 est donc la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 1 + 2x$.

On peut envisager plusieurs utilisations ce cet exemple :

1. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f, sa tangente au point d'abscisse 0 puis zoomer pour constater que la courbe et la tangente semblent se confondre au voisinage de 0. On peut aussi utiliser la table de la calculatrice pour afficher les valeurs prises par les fonctions f et g (et éventuellement $f - g$) au voisinage de 0. En effet, comparer des valeurs permet de prendre conscience que plus on est proche de zéro, plus l'approximation est bonne (et inversement, que plus on s'éloigne de zéro moins l'approximation est bonne).

2. À l'aide du tableur, calculer les valeurs de f et les valeurs obtenues à l'aide de l'approximation affine pour des valeurs de t proches de 0. Il est alors intéressant de calculer également les erreurs absolue et relative commises avec l'approximation affine. Ceci permet d'utiliser le tableur avec les élèves et également de réinvestir le chapitre sur les évolutions.

3. Après avoir déterminé l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, on calcule l'erreur commise en utilisant l'approximation affine au lieu de la fonction f. L'erreur absolue est ici la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = x^2$.

Applications

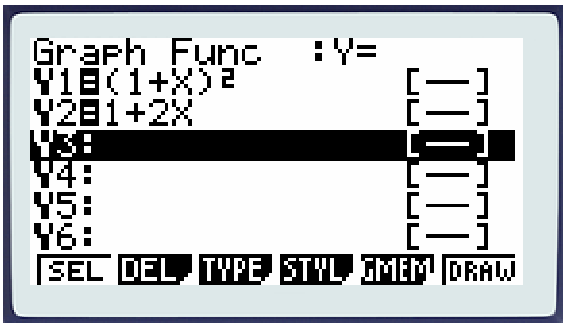
Application 1 – Comparaisons à l’aide de la calculatrice

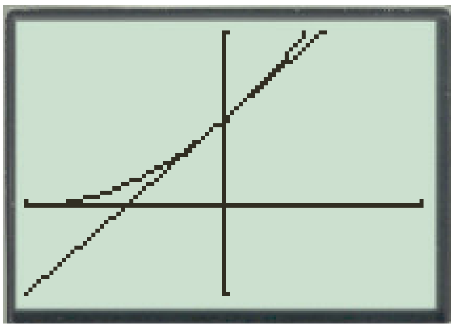
À partir de l’expression de la fonction *f*, on trace sur calculatrice la courbe représentative de *f* et sa tangente au point d’abscisse 0.

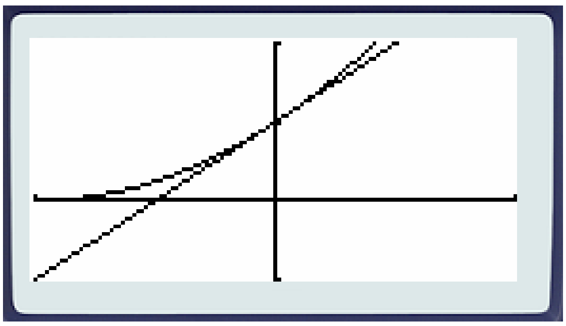
On cherche à savoir pour quelles valeurs de x la courbe représentative de *f* « colle » à sa tangente au point d’abscisse 0. Zoomer permet d’effectuer des observations et de comparer les écarts entre les valeurs de la fonction et les valeurs approchées. On observe que plus x est grand en valeur absolue, plus la courbe « s’éloigne » de sa tangente. L’approximation affine se justifie donc au voisinage de 0.

Exemple d’énoncé :

1. Approximation linéaire dans le cas de deux évolutions successives de taux *t :*
   - 1.A. Le prix d’un article augmente deux fois successivement du taux 0,03 (soit 3 %). Quel est le coefficient multiplicateur global correspondant à ces deux augmentations successives ? Quelle erreur sur le coefficient multiplicateur fait-on si l’on considère que le taux global d’augmentation est 0,06 ?
   - 1.B. Le prix d’un article augmente deux fois successivement du taux 0,5 (soit 50 %). Quel est le coefficient multiplicateur global correspondant à ces deux augmentations successives ? Quelle erreur sur le coefficient multiplicateur fait-on si l’on considère que le taux global d’augmentation est 1 ?
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (1 + t)^2$. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
   - 2.A. Déterminer l’expression de la fonction dérivée f' et l’équation réduite de la tangente à (C) au point d’abscisse 0.
   - 2.B. Afficher sur l’écran de la calculatrice la courbe représentant f et cette tangente, zoomer sur le point d’abscisse 0.
   - 2.C. Comparer l’écart entre $f(0{,}03)$ et $(2 \times 0{,}03 + 1)$ puis entre $f(0{,}5)$ et $(2 \times 0{,}5 + 1)$.







Application 2 – Étude sur tableur de l'erreur commise

Dans le cas de taux d'évolution « assez petits », le taux d'évolution global correspondant à deux évolutions successives de taux t peut être approché par $2t$.

On utilise une feuille de calcul afin de déterminer, pour différents taux d'évolution, l'erreur absolue et l'erreur relative commises en effectuant cette approximation.

Exemple d'énoncé :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Taux d'évolution *t*	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
2	Coefficient multiplicateur correspondant à deux évolutions successives de taux *t*	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,21
3	Coefficient multiplicateur correspondant à une évolution de taux 2*t*	1,02	1,04	1,06	1,08	1,1	1,12	1,14	1,16	1,18	1,2
4	Erreur absolue	-0,0001	-0,0004	-0,0009	-0,0016	-0,0025	-0,0036	-0,0049	-0,0064	-0,0081	-0,01
5	Erreur relative exprimée en pourcentage	-0,01%	-0,04%	-0,08%	-0,15%	-0,23%	-0,32%	-0,43%	-0,55%	-0,68%	-0,83%

1. Quelles formules, que l'on recopie ensuite de façon automatique vers la droite, entre-t-on dans les cellules B2 ? B3 ? B4 ?
2. Pour que l'erreur sur la valeur finale ne dépasse pas 1 % de la valeur initiale, quel est le taux d'évolution maximum pour lequel on peut faire cette approximation ?
3. Un article coûte 100 €. Son prix augmente deux fois successivement du taux t et on approche ces deux augmentations successives par une augmentation globale de taux $2t$. Afin que l'erreur commise reste inférieure à 1€, quel est le taux d'évolution maximum pour lequel on peut faire cette approximation ?
4. Un article coûte 100 000 €. Son prix augmente deux fois successivement du taux t et on approche ces deux augmentations successives par une augmentation globale de taux $2t$. Afin que l'erreur commise reste inférieure à 100 €, quel est le taux d'évolution maximum pour lequel on peut faire cette approximation ?

Les formules utilisées dans les cellules du tableur ci-dessus sont les suivantes :

B2 : =(1+B1)^2

B3 : =1+2*B1

B4 : =B3-B2

B5 : =(B3-B2)/B2 avec format de cellule : pourcentage.

Pour répondre aux questions 3. et 4., on peut ajouter dans le tableur une cellule avec le prix de l'article et une ligne de calculs donnant l'erreur commise en euros. Ceci permet ainsi de faire appel aux références absolues dans le tableur.
La formule entrée dans la cellule B8 est alors =$B$7*B2-$B$7*B3 ou encore =$B$7*B4.

*Remarque : En entrant dans la cellule B8 la formule =100*B4, il n'est pas nécessaire d'utiliser les références absolues. Mais cela impose de modifier la valeur dans la cellule B8 avant de la recopier pour la question 4.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Taux d'évolution *t*	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
2	Coefficient multiplicateur correspondant à deux évolutions successives de taux *t*	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,21
3	Coefficient multiplicateur correspondant à une évolution de taux 2*t*	1,02	1,04	1,06	1,08	1,1	1,12	1,14	1,16	1,18	1,2
4	Erreur absolue	-0,0001	-0,0004	-0,0009	-0,0016	-0,0025	-0,0036	-0,0049	-0,0064	-0,0081	-0,01
5	Erreur relative exprimée en pourcentage	-0,01%	-0,04%	-0,08%	-0,15%	-0,23%	-0,32%	-0,43%	-0,55%	-0,68%	-0,83%
6											
7	Prix de l'article	100									
8	Erreur commise en effectuant l'approximation (en euros)	-0,01	-0,04	-0,09	-0,16	-0,25	-0,36	-0,49	-0,64	-0,81	-1

Pour un article coûtant 100 €, l'erreur commise reste inférieure à 1 € pour les taux inférieurs à 0,1 (soit 10 %).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Taux d'évolution *t*	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
2	Coefficient multiplicateur correspondant à deux évolutions successives de taux *t*	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,21
3	Coefficient multiplicateur correspondant à une évolution de taux 2*t*	1,02	1,04	1,06	1,08	1,1	1,12	1,14	1,16	1,18	1,2
4	Erreur absolue	-0,0001	-0,0004	-0,0009	-0,0016	-0,0025	-0,0036	-0,0049	-0,0064	-0,0081	-0,01
5	Erreur relative exprimée en pourcentage	-0,01%	-0,04%	-0,08%	-0,15%	-0,23%	-0,32%	-0,43%	-0,55%	-0,68%	-0,83%
6											
7	Prix de l'article	100000									
8	Erreur commise en effectuant l'approximation (en euros)	-10	-40	-90	-160	-250	-360	-490	-640	-810	-1000

Pour un article coûtant 100 000 €, d'après ce tableau l'erreur commise reste inférieure à 100 € pour les taux inférieurs à 0,03 (soit 3 %). Modifier les valeurs du taux considéré à la ligne 1 permettra d'obtenir une valeur plus précise du taux « limite » recherché.