

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2009

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice I

Analyse

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur \mathbf{R} , à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\frac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a .

On rappelle que tout x de $[-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0, \pi]$.

1. (a) Vérifier $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).
- (b) Montrer, pour θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$.
2. Soit f une fonction solution du problème On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n , $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0, \pi]$.
 - (a) Montrer que f est continue en 0 et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.
 - (b) Vérifier l'existence d'un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
 - (c) Établir que a est positif et que $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$.

Exercice II

Probabilités

Jouons aux dés

Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1 à 20. Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité de $\frac{1}{20}$.

Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :

- avec la combinaison 3 - 4 - 12 - 16, je ne marque rien ;
- avec la combinaison 2 - 8 - 11 - 11, je marque 11 points ;
- avec la combinaison 4 - 9 - 9 - 9, je marque 9 points ;
- avec la combinaison 7 - 7 - 14 - 14, je marque 21 points ;
- avec la combinaison 2 - 2 - 2 - 2, je marque 2 points.

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit a compris entre 1 et 20. Déterminer pour tout $k \leq 4$ la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
3. Pour tout a on note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.
Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à l'aide de ces variables.
Combien de points puis-je espérer en moyenne ?

4. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?

On suppose à partir de maintenant qu'après avoir lancé les 4 dés, je sois autorisé à relancer entre 0 et 4 dés pour améliorer mon score.

5. J'ai obtenu 11 - 7 - 2 - 2. J'hésite entre tout relancer, garder le 11, et garder les deux 2. Que dois-je faire ?

6. On suppose que j'ai obtenu 4 dés différents $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Quels dés dois-je relancer ?

Exercice III Arithmétique

Étant donné deux entiers a et b , on désigne par $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre a et b .

On considère une suite finie à n termes $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

On dit qu'un entier strictement positif p est une période de U si l'on a $u_i = u_{i+p}$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n - p$. Une suite peut avoir plusieurs périodes.

1. On considère deux entiers strictement positifs a et b premiers entre eux.
 - (a) On définit r_k comme le reste de la division de ka par $a + b$. Montrer que lorsque k varie dans $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$, r_k prend toutes les valeurs de $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$.
 - (b) En déduire que si a et b sont périodes de U et si $n \geq a + b - 1$ alors U est constante.
 2. On suppose à présent que a et b sont des entiers strictement positifs de PGCD d . Montrer que si U est périodique de périodes a et b et si $n \geq a + b - d$, alors U est de période d .
 3. On considère deux entiers a et b strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.
 - (a) Montrer que l'on peut partager l'intervalle $\llbracket 1, a + b - 2 \rrbracket$ en deux sous-ensembles non vides A et B de manière que la suite V égale à 1 sur A et à 0 sur B soit de périodes a et b .
 - (b) Le partage obtenu à la question précédente est-il unique ? Montrer que, pour tout x de A , $a + b - 1 - x$ est dans A . Quelle propriété de la suite V traduit-on ainsi ?
-

Exercice I

1. (a) Par $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$.
 (b) Par variation pour la première et par intégration de la première entre 0 et θ pour la deuxième.
2. (a) Par continuité de f en 0 ($1 - f(x) \leq ax^2$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\theta_n) = 1$, donc θ_n est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour n assez grand.

Pour de tels n $\theta_n \leq \frac{\left[1 - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right] \pi}{2}$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.

D'après la relation satisfaite par f , on obtient : $\cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1})$.

Donc si on choisit un rang N à partir duquel θ_n est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on obtient : $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

(b) On aura donc : $\theta_n = \frac{\theta_N}{2^{n-N}}$ et $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)$.

Mais, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = a$ et $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$,

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\theta_N}{2^{n-N} \frac{x}{2^n}} \right]^2 = 2a$, $a \geq 0$ et, au signe près, $\theta_N = \frac{x}{2^N} \cdot \sqrt{2a}$.

On obtient : $f\left(\frac{x}{2^N}\right) = \cos \theta_N = \cos\left(\frac{x\sqrt{2a}}{2^N}\right)$, puis par récurrence sur $k \leq N$,

$f\left(\frac{x}{2^{N-k}}\right) = \cos\left(\frac{x\sqrt{2a}}{2^{N-k}}\right)$ ce qui donne le résultat pour $k = N$.

Exercice II

1. La probabilité que je ne marque rien est $\frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{20^4} = \frac{116280}{160000} = \frac{2907}{4000} \approx 0,72675$.
2. Loi binomiale : $P(N_a = 0) = \frac{19^4}{20^4} = \frac{130321}{160000}$, $P(N_a = 1) = 4 \times \frac{19^3}{20^4} = \frac{27436}{160000}$, $P(N_a = 2) = 6 \times \frac{19^2}{20^4} = \frac{2166}{160000}$, $P(N_a = 3) = 4 \times \frac{19}{20^4} = \frac{76}{160000}$, $P(N_a = 4) = \frac{1}{20^4}$.
3. X_a est une variable de Bernoulli de paramètre $P(N_a \geq 2) = \frac{2243}{160000} = p$. Soit G le gain, on a

$$G = \sum_{a=1}^{20} a X_a, \text{ donc}$$

$$E(G) = p \frac{20 \times 21}{2} = \frac{471030}{160000} \approx 2,94$$

4. Quatre possibilités de gain : $P(88xy) = \frac{19 \times 18 \times 6}{20^4} = \frac{2052}{20^4}$, $P(888x) = P(N_8 = 3) = \frac{76}{20^4}$, $P(8888) = \frac{1}{20^4}$, et les trois $P(xxyy) = \frac{6}{20^4}$ avec $x > y$ et $x + y = 8$ (trois couples possibles). Total :

$$\frac{2052 + 76 + 1 + 3 \times 6}{20^4} = \frac{2147}{160000} \approx 1,34\%$$

5. Si je relance tout, l'espérance de gain est celle de G précédemment calculée.

Si je garde les deux 2, la probabilité du motif $22xx$, à $x \neq 2$ fixé, est $\frac{1}{20^2}$, et dans ce cas je gagne $2+x$, dans le cas contraire je gagne 2. Ainsi l'espérance de gain est

$$E(G') = \sum_{x \neq 2} \frac{2+x}{20^2} + \left(1 - \frac{19}{20^2}\right) \times 2 = \frac{1008}{400} = 2,52$$

Si je garde le 11, soit M_a le nombre de a dans les quatre lancers. Si $a \neq 11$, la loi de M_a est $P(M_a = 0) = \frac{19^3}{20^3}$, $P(M_a = 1) = \frac{3 \times 19^2}{20^3}$, $P(M_a = 2) = \frac{3 \times 19}{20^3}$, et $P(M_a = 3) = \frac{1}{20^3}$.

En particulier, $P(M_a \geq 2) = \frac{58}{2000}$. Pour M_{11} , on décale tout de 1 et on a $P(M_{11} \geq 2) = \frac{1141}{8000}$. L'espérance de gain est alors

$$\begin{aligned} E(G'') &= \sum_{a \neq 11} a \times P(M_a \geq 2) + 11 \times P(M_{11} \geq 2) \\ &= \frac{199 \times 58 + 11 \times 1141}{8000} = \frac{24093}{8000} \approx 3,01 \end{aligned}$$

Conclusion : il est préférable de garder le 11, mais de peu. Il n'est pas intéressant de garder les 2...

6. Si je relance tout, l'espérance de gain est $g_0 = \frac{471030}{160000}$.

Si je garde a_1 , l'espérance de gain est (cf les calculs précédents) :

$$g_1(a_1) = \frac{(210 - a_1) \times 58 + 1141 \times a_1}{8000} = \frac{12180 + 1083a_1}{8000}$$

Si je garde $a_1 > a_2$, l'espérance est

$$\begin{aligned} g_2(a_1, a_2) &= \frac{1}{400} \times (210 - a_1 - a_2) \quad (\text{motif } a_1 a_2 x x) \\ &= \frac{38}{400} \times (a_1 + a_2) \quad (\text{motif } a_1 a_2 a_k x) \\ &= \frac{2}{400} \times (a_1 + a_2) \quad (\text{motif } a_1 a_2 a_1 a_2) \end{aligned}$$

et ainsi $g_2(a_1, a_2) = \frac{210 + 39(a_1 + a_2)}{400}$.

Si je garde $a_1 > a_2 > a_3$, l'espérance est $g_3(a_1, a_2, a_3) = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{20}$.

Enfin, si je garde tout, je ne gagne rien.

On résout les inégalités :

$$g_1 \geq g_0 \iff a_1 \geq 10,5$$

$$g_2 \geq g_0 \iff a_1 + a_2 \geq \frac{387030}{15600} \approx 24,8$$

$$g_3 \geq g_0 \iff a_1 + a_2 + a_3 \geq \frac{471030}{8000} \approx 58,88 \quad \text{impossible !}$$

Enfin $g_2 \geq g_1 \iff 780a_2 \geq 7980 + 303a_1$, mais comme $a_2 \leq a_1 - 1$, l'inégalité $g_2 \geq g_1$ implique que $780(a_1 - 1) \geq 7980 + 303a_1$ et donc que $a_1 \geq 18,36$.

Pour résumer, la démarche est la suivante : si $a_2 \geq 18$, garder a_1 et a_2 . Sinon, si $a_1 \geq 11$, garder uniquement a_1 . Sinon tout rejouer.

Exercice III

1. (a) a et b étant premiers entre eux, il en est de même pour a et $a + b$; il s'en suit que ka n'est divisible par $a + b$ que si $a + b$ divise k , et par conséquent les entiers r_k , $1 \leq k \leq a + b - 1$, sont bien éléments de $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$.
Il suffit donc de montrer que ces entiers sont distincts. Or $r_k = r_l$ si, et seulement si, $a + b$ divise $a(k - l)$, c'est à dire $a + b$ divise $(k - l)$, soit $k = l$ puisque $|k - l| < a + b$.
- (b) La différence $r_{k+1} - r_k$ vaut a ou $-b$ selon que r_k est inférieur ou supérieur à b .
Donc $U(r_k) = U(r_{k+1})$ et d'après ce qui précède et une récurrence finie, U est constante égale à $U(a)$ sur $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$.
Supposons $U(j)$ définie pour un $j \geq a + b$. Il existe q entier tel que $j = aq + r$ avec $1 \leq r \leq a$ donc $r \in \llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$. Alors $U(j) = U(r) = U(a)$.
2. Posons $a = da'$, $b = db'$ et soit i dans $\llbracket 1, d \rrbracket$.
La suite qui à k associe $u_{i+(k-1)d}$ est définie pour $i + (k - 1)d \leq a + b - d$ donc en particulier pour k dans $\llbracket 1, a' + b' - 1 \rrbracket$. Elle admet a' et b' , qui sont premiers entre eux, pour période, donc, d'après la question précédente, elle est constante. C'est le résultat annoncé.
3. (a) Puisque b est au moins égal à 2, on a $r_1 = a < a + b - 1$. L'entier m tel que $r_m = a + b - 1$ est donc au moins égal à 2.
Par ailleurs $r_{a+b-1} = b < a + b - 1$, donc m est au plus égal à $a + b - 2$.
Prenons $A = \{r_1 = a, r_2, \dots, r_{m-1} = b - 1\}$ et $B = \{r_{m+1} = a - 1, r_{m+2}, \dots, r_{a+b-1} = b\}$. A et B sont non vides et la suite V n'est pas constante.
Montrons que V est de période a . Soit i un entier au plus égal à $a + b - 2 - a = b - 2$. On a donc $i = r_k$ avec $k \neq m - 1$ et $k \neq a + b - 1$ donc si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i + a = r_{k+1}$.
Montrons que V est de période b . Soit i un entier au plus égal à $a + b - 2 - b = a - 2$. On a donc, pour un certain k , $i = r_k$, reste de la division de $r_{k-1} + a$ par $a + b$. On constate pareillement que si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i + b = r_{k-1}$.
- (b) La décomposition est unique à l'échange près de A et B car les propriétés de périodicité font que si par exemple $a = r_1 \in A$, alors r_2, \dots, r_{m-1} sont dans A .
La suite $k \mapsto V(a + b - 1 - k)$ possède les mêmes propriétés que V . Par unicité elle est égale à V : V est un *palindrome*.