

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

—

SESSION 2018

—

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SERIE S

(Classes de terminale S)

Durée : 5 heures

—

La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants et 7 pages numérotées 1 à 7.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Consignes aux candidats

- Ne pas utiliser d'encre claire
- N'utiliser ni colle, ni agrafe
- Numéroté chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)
- Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :

Concours / Examen : CGL

Section/S spécialité/Série : MATHS

Epreuve : 101

Matière : MATH

Session : 2018

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME I
Approximations de courbes

Partie A : Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n , on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0; 1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n . Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$; $B_{1,0}(p) = 1 - p$ et $B_{1,1}(p) = p$.

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Bernstein**.

- 1° (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.
(b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.
- 2° (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?
(b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n - 1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).$$

- 3° (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0; 1]$ s'annule un polynôme de Bernstein?
On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i .
(b) Qu'en est-il de son signe sur $[0; 1]$?
- 4° Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à-dire, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \dots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

- 5° Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^n i B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes?

Partie B : Des courbes de Bézier

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit n un entier naturel. On se donne $n + 1$ points non alignés du plan $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$.

On appelle **courbe de Bézier** de degré n et de points de contrôle $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$ l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0; 1]$ tels que

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(p) \overrightarrow{OP_i}.$$

Dans la suite on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.

On se fixe donc A, B, C trois points du plan non alignés.

1° Reconnaître la nature géométrique

- (a) de la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle A .
- (b) de la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle B et C .

2° On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle A , B et C .

- (a) Justifier que les points A et C appartiennent à cette courbe. Le point B y appartient-il?
- (b) Dans cette question on prend les points de coordonnées $A(-2;5)$, $B(2;1)$ et $C(4;3)$. Proposer une construction des points de cette courbe pour $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{4}$. Tracer la courbe à main levée.

3° Démontrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle ABC .

4° Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2? Justifier votre réponse.

PROBLÈME II

Un si discret Monsieur Dirichlet

Soit \mathcal{S} un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de \mathcal{S} sont reliées par des traits, de sorte qu'en suivant ces traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point de \mathcal{S} à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même).

Deux points de \mathcal{S} reliés par un trait sont dits *voisins*.

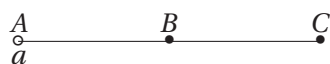
Si M est un point de \mathcal{S} , on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M , et on note $d(M)$ le nombre de voisins de M , appelé le *degré* de M .

Chaque point de \mathcal{S} a été colorié soit en bleu soit en jaune, et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble \mathcal{S} . À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix. La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à l'autre) de façon à satisfaire la propriété (\mathcal{P}) suivante :

(\mathcal{P}) *Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.*

Partie A : Quelques exemples pour commencer

1° Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$, avec A voisin de B , lui-même voisin de C comme sur dessin ci-dessous.

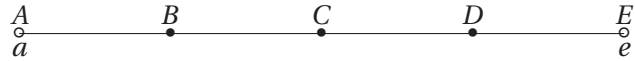


De plus, A est le seul point jaune et Gustav lui a attribué le réel a .

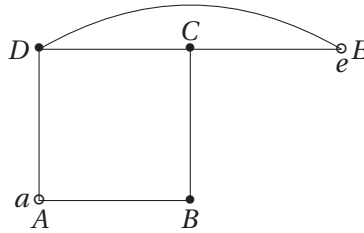
Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à B et à C afin de satisfaire la propriété (\mathcal{P})?

2° Pour les trois questions suivantes on suppose que $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et e .

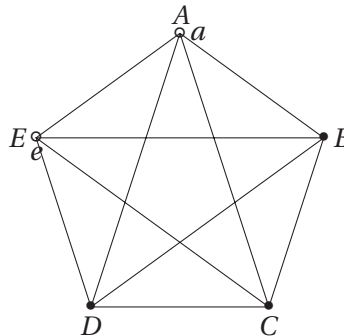
- (a) Les liaisons étant indiquées selon le schéma suivant, quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points B, C et D afin de satisfaire la propriété (\mathcal{P}) ?



- (b) Même question pour le schéma suivant :



- (c) Même question pour le schéma suivant :



- 3° Dans cette question uniquement on généralise le schéma de la question 2-(c) avec un nombre quelconque de points.

On suppose que $n \geq 1$ est un entier, que $\mathcal{S} = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}\}$ et que tout point de \mathcal{S} est voisin de chaque autre point de \mathcal{S} . De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et b . Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points P_i pour $i = 1, \dots, n$ afin de satisfaire la propriété (\mathcal{P}) ?

Partie B : Étude du cas général

On note respectivement \mathcal{J} l'ensemble des points jaunes, et \mathcal{B} l'ensemble des points bleus. Ainsi

$$\mathcal{S} = \mathcal{J} \cup \mathcal{B}.$$

Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela consiste à définir une fonction k de \mathcal{J} dans \mathbb{R} .

L'objectif de Maryam est donc de construire une fonction $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune (1)} \\ f(M) = \frac{f(P_1) + \dots + f(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu (2)} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M \text{) et } P_1, \dots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

On dira alors que f est une solution **pour l'attribution** k .

Dans cette partie, on suppose donc donnée une telle attribution k .

On note K le plus grand des nombres $k(M)$ lorsque M décrit l'ensemble \mathcal{J} .

Existence d'une solution.

1° On suppose dans cette question que $k(M) \geq 0$ pour tout point $M \in \mathcal{J}$. On construit alors, par récurrence, la suite (f_n) de fonctions suivante :

On pose $f_0(M) = k(M)$ si M est jaune, et $f_0(M) = 0$ si M est bleu.

Puis, pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\begin{cases} f_{n+1}(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune,} \\ f_{n+1}(M) = \frac{f_n(P_1) + \dots + f_n(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu,} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M \text{) et } P_1, \dots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

(a) Prouver que, pour tout $n \geq 0$ et tout point $M \in \mathcal{S}$, on a $0 \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$.

(b) En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution k .

2° Prouver que si f est une solution pour l'attribution k et si α est une constante, alors la fonction $f + \alpha$ est aussi une solution pour l'attribution $k + \alpha$.

3° En déduire qu'il existe une solution à notre problème en général, c'est-à-dire sans l'hypothèse de la question 1° : $k(M) \geq 0$ pour tout point $M \in \mathcal{J}$.

Unicité de la solution.

On suppose dans cette sous-partie que l'on dispose d'une solution f pour cette attribution k .

4° Prouver que, pour tout point $M \in \mathcal{S}$, on a $f(M) \leq K$.

5° Supposons que g soit également une solution pour l'attribution k .

(a) Justifier que la fonction $f - g$ vérifie la condition (2).

(b) Que vaut $f - g$ sur \mathcal{J} ?

(c) En déduire que $f = g$.

6° Que peut-on dire de f s'il n'y a qu'un seul point jaune ?

PROBLÈME III
Les nombres en or

On note φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x + 1$. Le nombre φ , connu depuis l'Antiquité, est appelé *nombre d'or*. Un réel x est dit un **nombre en or** s'il existe :

- deux entiers naturels p et q
- des entiers $a_p, a_{p-1}, \dots, a_0, \dots, a_{-q}$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1 tels que

$$x = a_p \varphi^p + a_{p-1} \varphi^{p-1} + \dots + a_1 \varphi + a_0 + a_{-1} \varphi^{-1} + \dots + a_{-q} \varphi^{-q}.$$

Dans ce cas, on notera $x \triangleright a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$.

Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \triangleright 1101, 1001$. On dira que alors 1101, 1001 est une **représentation en or** de x .

Il est clair que l'on peut ajouter, au début, ou la fin de la représentation autant de 0 que l'on souhaite.

Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation **1101, 1001**.

Partie A : Tous les entiers naturels sont en or

1° Montrer que, dans la représentation en or de x , on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de x .

Par exemple le réel dont la représentation en or est 1101, 1001 admet également 1110, 0001 et 1101, 0111 comme représentation en or .

On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.

2° Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'y a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à 011...1 où il y a n occurrences du chiffre 1.

3° Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.

4° Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

Partie B : Représentation en or pur

On dira qu'une représentation $x \triangleright a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$ d'un nombre en or est en **or pur** si pour tout i ,

$$a_i a_{i+1} = 0.$$

En d'autres termes, une représentation de x est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit x un réel non nul, si $x \triangleright a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$, on définit la **teneur en or** de la représentation comme étant égale à l'exposant de la plus grande puissance de φ dont le coefficient vaut 1, dans l'égalité $x = a_p \varphi^p + \dots + a_{-q} \varphi^{-q}$.

Par exemple la teneur de la représentation 1101, 1001 est égale à 3 et celle de 0, 0010 est égale à -3 .

1° Donner une représentation en or pur des entiers 2, 3, 4 et 5.

2° Soit x un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à n .

(a) Montrer que

$$\varphi^n \leq x < \varphi^{n+1}.$$

(b) Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.

3° Soit x un réel non nul ayant une représentation en or pur.

(a) Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de x à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.

(b) Écrire un algorithme permettant de déterminer cette représentation.

(c) Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.

4° Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.

5° Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.

