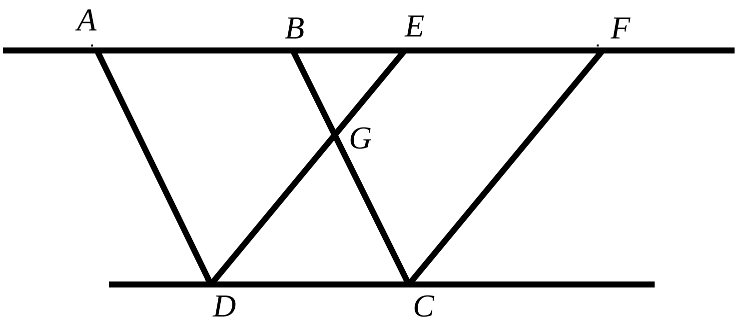
Découpages et recompositions pour les aires et volumes

André PRESSIAT (INRP)

Nombreux sont les acteurs de l'enseignement des mathématiques qui souhaitent ne pas réduire l'apprentissage des notions d'aire et de volume à la manipulation des formules permettant de les calculer. Pour éviter cette centration prématurée sur les aspects calculatoires, les programmes[1] inscrivent comme compétence exigible la détermination d'aires à partir d'un pavage simple, et encouragent dans les commentaires la détermination d'aires à l'aide “soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements”. La pratique des reports, décompositions, découpages et recollements se voit souvent légitimée à ce niveau de l'enseignement par l'âge des élèves et leur faible maturité mathématique. L'objet de ce texte est de mettre en évidence la légitimité de ces pratiques en les reliant aux travaux sur les aires et les volumes de mathématiciens aussi célèbres qu'Euclide dans ses *Éléments* et David Hilbert (1862 - 1943) dans *Les fondements de la géométrie*.

1 - Aires et volumes sans les mesures

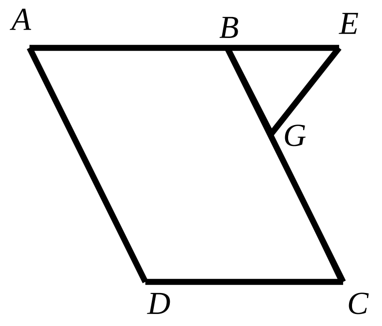
Ces deux mathématiciens ont en commun la volonté de construire une théorie géométrique sans disposer au départ de la notion de nombre. Pourtant, cette théorie prend en compte la question des aires et des volumes. Chez Euclide, la notion d'aire n'est pas définie précisément : il introduit une nouvelle notion d'égalité entre figures, qui correspond à ce que nous appellerions “figures d'aires égales”. Pour s'en faire une idée, nous allons examiner la démonstration du premier théorème, qui est le suivant : “Des parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux”.

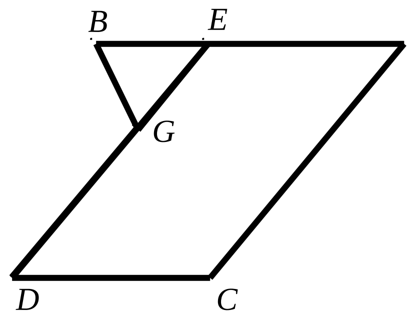


[1] Ce qui suit fait allusion aux programmes de la classe de Sixième.

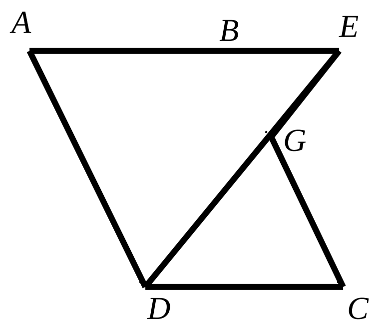
ABCD et *CDEF* sont les deux parallélogrammes dont il s'agit de démontrer qu'ils sont “égaux” au sens donné à ce mot par Euclide.

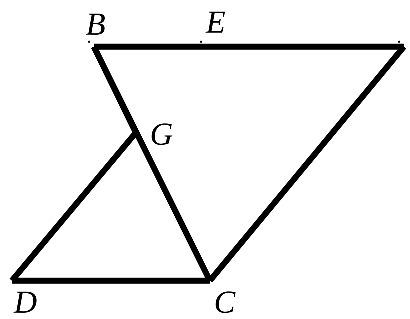
Pour cela, il ajoute le triangle *BEG* à chacun des parallélogrammes. Il lui suffit alors de démontrer que les deux figures ainsi obtenues :





sont “égales”. Pour cela, il décompose chacune d'elles en deux triangles :





– les triangles *ADE* et *CDG* pour la première ;
– les triangles *BCF* et *CDG* pour la seconde.

Il lui suffit alors de démontrer que les deux triangles *ADE* et *BCG* sont “égaux”, c'est-à-dire “isométriques”, ce qu'il fait en utilisant l'un des cas d'“égalité” des triangles.

La démonstration donnée par Euclide, ainsi que celles qui suivent, reposent sur plusieurs propriétés admises dès le départ de son livre (Notions communes) concernant les grandeurs :

- Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
- Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
- Les grandeurs qui sont doubles (ou moitiés) d'une même grandeur sont égales.
- Le tout est plus grand que la partie.

De plus, il utilise deux autres propriétés admises :

- Des figures “égales” (au premier sens, c'est-à-dire “isométriques”) sont égales (au nouveau sens, c'est-à-dire ont des aires égales).
- Si deux carrés sont “égaux” au sens nouveau, leurs côtés sont “égaux” (au sens premier d'“isométriques”).

On voit le rôle tenu par les idées de décompositions, et de recollements dans cette démonstration.

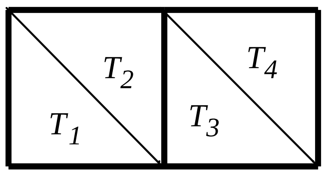
Hilbert, dans son travail de remise de l'édifice euclidien sur des bases logiques solides, va-t-il rejeter ces idées ? Au contraire, il va les formaliser en définissant deux notions concernant les figures polygonales[2], : l'équidécomposabilité, et l'équicomplémentarité.

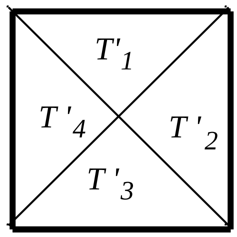
Deux figures P et P' sont équidécomposables[3] s'il est possible d'écrire chacune d'elles sous forme de réunions de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre :

$$P\ ?\ T_1\ ?\ T_2\ ?\ \dots\ ?\ T_n$$
$$P'\ ?\ T'_1\ ?\ T'_2\ ?\ \dots\ ?\ T'_n$$

telles que, pour chaque i, les triangles T_i et T'_i soient “égaux” (Hilbert emploie le mot “congruents” au lieu de “égaux”).

Ainsi, par exemple, la réunion de deux carrés “égaux” est équidécomposable avec un carré construit sur une de leurs diagonales.





Pour pouvoir correctement formaliser la notion de figures “égales” (au sens de "ayant des aires égales”) créée par Euclide, et notamment pour pouvoir légitimer les additions et soustractions de figures “égales” que ce dernier utilise dans ses démonstrations, Hilbert définit la notion d'équicomplémentarité :

Deux figures P et P' sont équicomplémentaires[4] s'il existe des figures Q et Q' telles que :

– P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
– P' et Q' n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
– Q et Q' sont équidécomposables ;
– $P\ ?\ Q$ et $P'\ ?\ Q'$ sont équidécomposables.

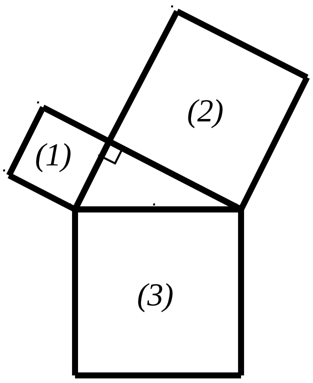
[2] Ce sont les figures qui peuvent s'exprimer sous la forme d'une réunion d'un nombre fini de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre (ou encore de triangles n'ayant en commun qu'un sommet ou un segment, mais n'ayant pas de points intérieurs en commun : certains auteurs qualifient de tels triangles de “quasi-disjoints”).

[3] En allemand, le mot correspondant est “zerlegungsgleich” qui signifie “égale décomposition, ou égal découpage).

[4] Dans les six premières éditions, Hilbert emploie le mot “inhaltsgleich”, qui signifie littéralement "contenu égal, ou superficie égale" ; dans les quatre éditions suivantes, il emploie “ergängzungsgleich” qui signifie “égal par complément”.

Le lecteur pourra reprendre la démonstration du théorème relatif aux parallélogrammes *ABCD* et *CDEF* évoquée ci-dessus. En posant $P = ABCD$, $P' = CDEF$, $Q = Q' = BEG$, P ? Q et P' ? Q' sont équidécomposables, car réunion des triangles *ADE* et *CDG* d'une part et *BCF* et *CDG* d'autre part, triangles qui sont deux à deux congruents.

Deux figures équidécomposables sont évidemment équicomplémentaires. Mais deux figures équicomplémentaires (ayant le même contenu) sont-elles équidécomposables ?



Par exemple, sur la figure bien connue ci-contre, la figure formée par la réunion des carrés (1) et (2), dont le théorème de Pythagore affirme qu'elle a le même contenu que le carré (3), est-elle équidécomposable avec ce carré ?

Nous allons voir que la réponse est affirmative, sous certaines conditions.

2 - Aires et volumes avec des nombres

À l'école et au collège, on aborde la géométrie en s'autorisant l'emploi des nombres, qui sont très tôt utilisés pour mesurer les longueurs. Hilbert a construit une théorie permettant de construire des nombres en partant des segments de droite parmi lesquels est choisi arbitrairement un segment unité, et de définir pour ces nombres les quatre opérations et la relation d'ordre usuels[5]. En ce qui concerne les aires, il a démontré qu'il est alors possible d'associer à chaque figure polygonale P un nombre $a(P)$, de telle manière que :

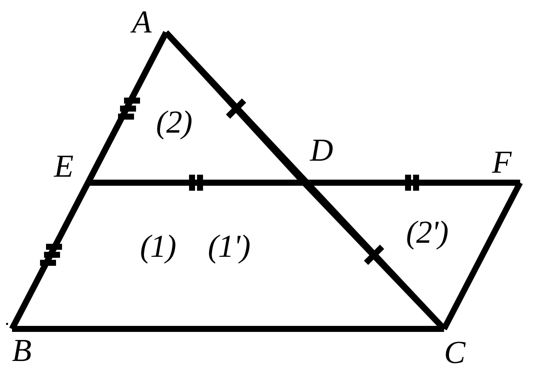
– pour tout triangle T, $a(T) > 0$;
– si T et T' sont deux triangles “égaux”, alors $a(T) = a(T')$;
– si deux figures P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre, alors $a(P$? $Q)$? $a(P)$? $a(Q)$.

Le nombre $a(P)$ est appelé “aire de P”. L'aire d'un triangle est définie à l'aide de la formule usuelle “1/2 bh”, et l'aire d'un carré construit sur un segment unité est égale à 1. Alors Hilbert

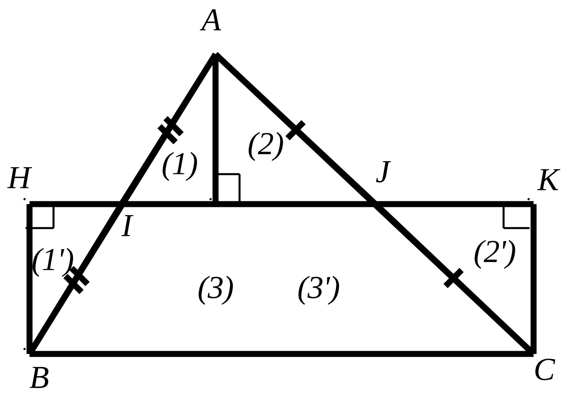
[5] Usuellement, les nombres utilisés sont les nombres réels, mais la théorie d'Hilbert permet de ne pas se limiter à ce cas.

démontre que, dans un plan satisfaisant l'axiome des parallèles, deux figures P et Q sont équicomplémentaires si et seulement si $a(P) = a(Q)$.
Pourquoi évoquer ici l'axiome des parallèles ? La raison vient du fait que la question des aires a fait l'objet d'un intense travail au moment de la découverte des géométries non-euclidiennes, et que l'un des théorèmes fondamentaux sur les aires porte le nom de Bolyai (1802-1860 ; il est le découvreur de l'une d'entre elles : la géométrie hyperbolique). Le théorème de Bolyai-Gerwien établit un lien entre “avoir même aire” et “étre équidécomposable”. Plus précisément :
Dans un plan vérifiant l'axiome des parallèles et l'axiome d'Archimède[6], deux figures P et Q sont équidécomposables si et seulement si $a(P) = a(Q)$.
Ainsi, en rajoutant l'axiome d'Archimède à la théorie, il y a équivalence entre “avoir des aires de même mesure” et “être équidécomposable”. Cet axiome jouissant à l'école et au collège d'un fort degré d'évidence, il est légitime sur le plan mathématique d'organiser avec les élèves des travaux autour de la notion d'équidécomposabilité. Pour des raisons pratiques, on peut avantageusement la remplacer par la notion *d'équivalence par dissection*, qui lui est équivalente. La seule différence réside dans le fait que les figures appariées intervenant dans une dissection ne sont pas nécessairement des triangles, mais peuvent être n'importe quelles figures polygonales isométriques, alors que pour l'équidécomposabilité les figures appariées sont nécessairement des triangles.

Les figures et propriétés suivantes nous ramènent aux questions d'aires traitées au collège, et fournissent des justifications qui sont abordables à ce niveau.

	Tout triangle est équivalent par dissection à un parallélogramme. En effet, les deux triangles ADE et CDF sont isométriques, images l'un de l'autre par la symétrie de centre D. Donc le triangle ABC et le parallélogramme $BCFE$ sont équivalents par dissection.

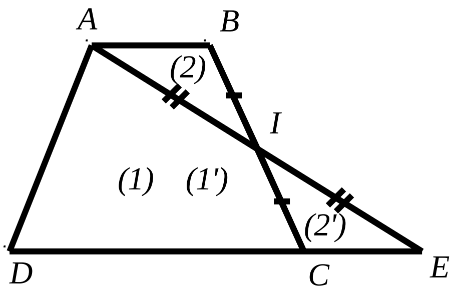
[6] Cet axiome s'énonce ainsi : quels que soient les segments AB et CD, il existe un entier naturel n tel que le segment formé par n copies de AB mises bout à bout soit plus grand que le segment CD.



Tout triangle est équivalent par dissection à un rectangle.

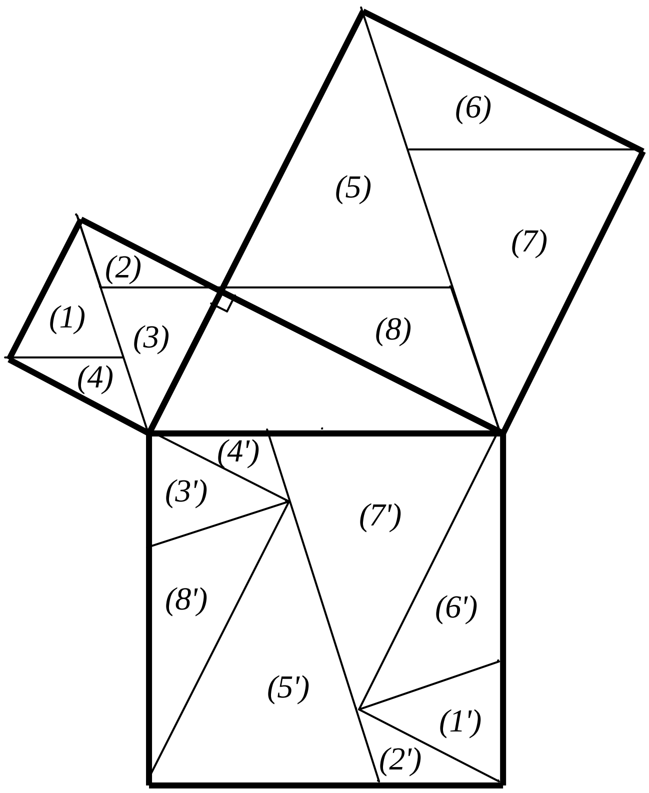
Là encore, on utilise des symétries centrales.

Le triangle *ABC* et le rectangle *BCKH* sont équivalents par dissection.



Tout trapèze est équivalent par dissection à un triangle.

Là encore, l'isométrie qui permet d'apparier *(2)* et *(2')* est une symétrie centrale.



Considérons la configuration du théorème de Pythagore. Voici une dissection des deux figures ayant même aire, que le lecteur est invité à reproduire et à justifier.

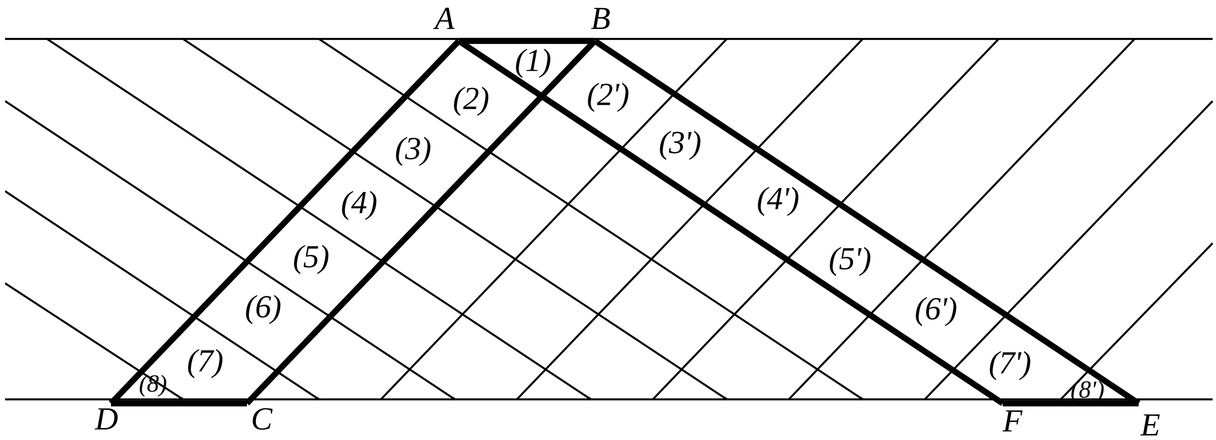
On pourra remarquer que les isométries permettant d'apparier les triangles ne sont pas toutes des symétries centrales.

Dans les trois premiers exemples qui précèdent, les seules isométries qui ont été utilisées sont des symétries centrales. On dit que deux figures *P* et *Q* sont S-équidécomposables (ou équivalentes par S-dissection) lorsqu'elles sont équivalentes par dissection et que les isométries permettant les appariements sont des translations ou des symétries centrales.

En 1951, les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur ont démontré que deux figures *P* et *Q* ont même aire ($a(P) = a(Q)$) si et seulement si *P* et *Q* sont S-équidécomposables.

Ce résultat étonnant garantit que deux parallélogrammes ayant une base en commun et situés entre les mêmes parallèles sont S-équidécomposables.

La figure ci-dessous suggère le moyen d'obtenir une S-dissection des deux parallélogrammes *ABCD* et *ABEF*, ainsi que l'importance du rôle de l'axiome d'Archimède (qui nous garantit qu'une telle dissection existe quel que soit le cas de figure dans lequel [AF] et [BC] se coupent.).



3 - Et pour les volumes ?

Les techniques développées par Euclide pour les aires lui permettent d'établir les résultats relatifs aux volumes des parallélépipèdes et des prismes. Mais il adopte une méthode complètement différente et beaucoup plus compliquée (la méthode d'exhaustion) pour établir les résultats concernant les pyramides. Des mathématiciens comme Gauss et Gerling se sont demandés s'il était possible d'établir ces résultats sans recourir à la méthode d'exhaustion. C'est précisément cette question qui constitue l'un des 23 problèmes que Hilbert proposa à la communauté des mathématiciens réunie au Congrès de Paris en 1900. Le troisième problème de Hilbert consistait à démontrer que la méthode d'exhaustion est vraiment nécessaire en exhibant deux solides ayant le même volume mais qui ne sont pas équidécomposables. La solution à ce problème fut trouvée la même année par le mathématicien Max Dehn, qui a montré qu'un tétraèdre ne peut pas être dissecté en un cube. Ainsi l'équidécomposabilité caractérise les figures planes d'aires égales, mais pas les solides de l'espace de volumes égaux.