Rédiger, argumenter, remettre en question – Le raisonnement

Le raisonnement déductif

C'est un raisonnement qui consiste à tirer, à partir d'une ou plusieurs propositions, une autre qui en est la conséquence nécessaire.

Intérêt de la modélisation mathématique

Le mathématicien Ivar EKELAN expose dans une conférence en 2000 dans le cycle « université du savoir » le lien entre mathématiques et économie d'une manière très accessible et illustrée de nombreux exemples.

Il explique, en particulier quel est l'intérêt d'avoir recours à une modélisation mathématiques :

- Afficher les hypothèses de base sur lesquelles s'appuie le raisonnement (c'est-à-dire que le choix du modèle qui sert de départ au raisonnement est clairement dévoilé).
- Permettre de communiquer sans ambiguïté. Les équations mathématiques sont sans équivoques.
- Dominer la complexité (les mathématiciens ont 30 siècles d'expérience et savent résoudre facilement les équations posées par le modèle choisi).
- Vérifier la cohérence logique des conclusions présentées avec les hypothèses faites.

Application : exploitation de la conférence en classe

Ivar Ekelan propose des exemples ludiques et variés qui permettront aux élèves de mettre en application les concepts énoncés précédemment sur des cas concrets.

Vidéo complète librement téléchargeable téléchargeable à l'adresse suivante référence Economie et Mathématiques Ivar Ekelan 2000 : www.canal-u.tv/

La théorie très controversée de Malthus en dynamique des populations

En 1798, Malthus publie un essai dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira le monde à la famine. Il prône une politique de restriction démographique.

Il prédit mathématiquement que sans frein, la population augmente de façon géométrique , tandis que les ressources ne croissent que de façon arithmétique.

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Malthus fait l'hypothèse que la population augmentait de 2% chaque année et que les progrès de l'agriculture permettraient de nourrir 500 000 personnes de plus chaque année.

a) On note S_n le nombre de personnes pouvant être nourries l'année 1800+n et P_n la population de l'Angleterre l'année la même année. Ecrire un algorithme qui donne le nombre d'années au bout duquel la population aura dépassé le niveau de subsistance puis le programmer sur la calculatrice.

Que révèle ce résultat sur les hypothèses formulées par Malthus ?

Entrées : Un entier naturel N, Un nombre P, Un nombre S
Sorties : Le nombre d'années N au bout du quelle le nombre P d'habitants dépasse le nombre S de personnes pouvant être nourries.
Demander P
Demander S
0→ N On initialise le compteur à 0
Tant que P< S
P prend la valeur 1,02*P
S prend la valeur 0,5+S
N prend la valeur N+1
Fin de Tant que
Afficher N

b) Validité du modèle pour des prévisions à long terme

En supposant que la population mondiale suive un modèle de Malthus et en observant que celle-ci a doublé entre 1928 et 1970, on a obtenu un taux d'évolution k=0,0166.

En 1970 celle-ci était de 3,7 milliards d'individus.

En gardant la même évolution, quelle population pouvait-on prévoir pour la fin d'année 1980 ? 1990 ? 2000 ?

		Evolution de Pn suivant un taux d'accroissement de 1,66%
n	Année	Pn
0	1970	3,7
1	1971	=C6*1,0166
2	1972	3,823859572
3	1973	3,887335641
4	1974	3,951865413
5	1975	4,017466378
6	1976	4,08415632
7	1977	4,151953315
8	1978	4,22087574
9	1979	4,290942277
10	1980	4,362171919
11	1981	4,434583973
12	1982	4,508198067
13	1983	4,583034155
14	1984	4,659112522
15	1985	4,73645379
16	1986	4,821709958
17	1987	4,908500737
18	1988	4,996853751
19	1989	5,086797118
20	1990	5,178359466
21	1991	5,271569937

c) Analyse d'une animation de l'INED (Institut national d'études démographiques)

L'INED propose sur son site une animation sur l'évolution de la population mondiale : www.ined.fr/fr/tout_savoir_population/animations/population_mondiale/

Comparer avec les statistiques à postériori : est-ce satisfaisant ?

1980	1990	2000
4,4	5,3	6

Une introduction à la théorie des jeux

L'objectif de cette séquence est de mettre en œuvre le raisonnement déductif de manière ludique au travers d'une petite initiation à la théorie des jeux.

L'Activité 1 est une introduction à la théorie, à partir d'une approche ludique sur l'épreuve du tir aux buts au football.

L'activité 2 permet aux élèves de s'initier à l'analyse d'un jeu, notamment en mettant en évidence les gains pour chaque joueur, à partir de l'énoncé des règles.

Les jeux choisis sont les plus classiquement présentés lorsqu'on étudie la théorie des jeux : Pierre-feuille-ciseaux ; le dilemme du prisonnier et enfin la guerre des sexes. L'approche est très simplifiée, nulle virtuosité n'est demandée et cette activité est largement abordable par tout élève de première ou terminale.

Introduction

Un peu d'histoire…

« Game theory can be defined as the study of mathematical models of conflict and cooperation between intelligent rational decision-makers. Game theory provides general mathematical techniques for analyzing situations in wich two or more individuals make decisions that will influence one another's welfare" - Roger Myerson, prix Nobel d'économie en 2007.

La théorie des jeux peut être définie comme l'étude mathématique des interactions stratégiques entre plusieurs joueurs rationnels. Elle permet de décrire et d'analyser de nombreuses relations économiques et sociales sous forme de jeux stratégiques. L'objectif est une optimisation du contentement de chacun des joueurs. C'est une branche relativement récente puisqu'elle n'a que 60 ans d'existence. Elle connait un essor considérable depuis la parution de l'ouvrage de John Von Neuman et Morgenstern « theory of game and economic behavior » en 1944.

Ses applications en économie ont été récompensées par 12 prix Nobels depuis les années 70 !

Depuis, d'autres domaines d'application se sont développés, notamment en sociologie et en sciences politiques.

Caractérisation d'un jeu stratégique

Une personne est dans une situation de jeu stratégique avec une autre personne lorsque ses gains dépendent de ses propres actions mais aussi en partie des actions des autres. Les échecs sont par exemple un jeu de stratégie puisque la victoire ou la défaite d'un des joueurs dépend autant de ses propres choix que de ceux de son adversaire.

L'exemple du tir au but :

L'épreuve de tir au but au football peut également être modélisée par un jeu stratégique. En effet, deux individus rationnels, le gardien et le tireur, doivent simultanément prendre une décision.

- Le gardien peut choisir entre trois options : plonger à droite, à gauche ou rester au milieu du but.
- Le tireur peut lui aussi, choisir de rester à gauche, à droite ou au centre du but.

La réussite du tireur dépend non seulement de sa décision mais également de l'action de son adversaire, le gardien.

L'écrivain Peter Handke décrit cette interaction dans son livre «La peur du gardien de but lors d'un penalty » : *« Le gardien réfléchit au coin du but dans lequel l'adversaire va tirer. Lorsqu'il connait le tireur, il connait aussi le coin qu'il choisit généralement. Mais le tireur tient probablement compte du fait que le gardien réfléchit la dessus. Le gardien poursuit alors sa réflexion et envisage que la balle pourrait, pour une fois, aller dans l'autre coin. Si le tireur continue de réfléchir en fonction du gardien, il décidera tout de même de tirer dans le coin habituel. »*

Un théoricien des jeux, Ignacio Huerta a analysé une grande série de penalty tirée entre 1995 et 2000 et a calculé la probabilité de succès suivant que le tireur choisit son « coin naturel » de tir ou non. Ainsi, il a montré que si le tireur choisit son coin naturel et que le gardien anticipe ce coin naturel, il a une probabilité de marquer le but de 70%. Il montre aussi que pour optimiser ses chances de marquer, le tireur doit choisir son coin naturel dans 61% des cas. Le gardien, quant à lui, doit opter pour le coin naturel du tireur dans 58% des cas s'il veut avoir le maximum de chances d'arrêter un but.

Les grands joueurs, comme Zidane ou comme le gardien italien Buffon, sont exactement à l'équilibre prédit par la théorie qui s'en trouve ainsi validée !

On dit qu'un jeu est à information complète lorsque, en plus de l'hypothèse de rationalité, on fait l'hypothèse que chaque joueur dispose de toute l'information se rapportant au jeu, à savoir le nombre de joueurs, l'ensemble des stratégies possibles de chaque joueur et les fonctions de paiement de chaque joueur. Les joueurs sont censés prendre leur décision de façon simultanée.

Représentation mathématique d'un jeu

Un jeu est souvent représenté sous une forme simplifiée que l'on appelle « forme normale ». La forme normale d'un jeu est la donnée de trois éléments qui décrivent le jeu :

- Le nombre de joueurs ;
- Les stratégies possibles pour chaque joueur ;
- Le gain de chaque joueur pour chaque combinaison de stratégie pouvant être choisie par les joueurs.

Il est courant de représenter le jeu sous sa forme normale par une matrice des gains. Il s'agit d'un tableau à double entrée qui énumère les stratégies possibles des joueurs respectifs. Dans la case correspondant à la ième ligne du tableau et la jième colonne, on note le couple de gain des joueurs correspondant au choix de stratégie i pour le premier et j pour le second.

Quelques exemples classiques

Exemple 1 :

PIERRE FEUILLE CISEAU : un jeu à somme nulle

Description

Le jeu comporte deux joueurs. Chaque joueur a trois stratégies possibles (pierre, feuille ou ciseau). Pour modéliser le problème, on considère que chaque joueur obtient un gain de 1 en cas de victoire, 0 en cas d'égalité et -1 en cas de défaite.

On peut alors représenter ce jeu sous forme normale par le tableau qui suit.

Dans chaque case, on inscrit le gain correspondant au couple de stratégie choisie. Le premier nombre est le gain du joueur A et le second celui du joueur B.

- Compléter le tableau par les couples appropriés :

Joueur B / Joueur A	Pierre	Feuille	Ciseau
Pierre			(1,-1)
Feuille			
Ciseau			

- Expliquer pourquoi ce type de jeu est appelé « à somme nulle ».

Plus généralement, les jeux dans lesquels l'intérêt d'un joueur est strictement opposé à l'intérêt de l'autre joueur sont dits à somme nulle. Les échecs en sont un autre exemple.

<u>Exemple 2</u> :

LE DILEMME DU PRISONNIER : Tension entre l'intérêt individuel et l'intérêt collectif

Description :

Deux individus complices et soupçonnés d'un crime sont arrêtés et placés dans des cellules séparées sans possibilité de communication. N'ayant pas de preuve suffisante pour leur inculpation, le juge, convaincu de leur culpabilité, tente d'obtenir des aveux et à chacun d'eux, il offre les choix suivants :

1. Si un des prisonniers dénonce l'autre, il est remis en liberté alors que le second obtient la peine maximale (10 ans) ;
2. Si les deux se dénoncent entre eux, ils seront condamnés à une peine plus légère (5 ans).
3. Si les deux refusent de dénoncer, la peine sera minimale (6 mois) faute d'éléments dans le dossier.

- Justifier que cette situation peut être modélisée par un jeu stratégique à information complète.
- Compléter le tableau suivant en envisageant les différentes stratégies possibles pour chacun des deux joueurs :

	B ne dénonce pas	B parle
A ne dénonce pas	A : 6 mois B : 6 mois	A : B :
A parle	A : B :	A : B :

- En analysant les résultats consignés dans ce tableau, répondre aux questions suivantes :
    - Quel est l'intérêt individuel de chacun des prisonniers en supposant que son complice se taise ?

◦ Quel est l'intérêt individuel de chacun des prisonniers en supposant que son complice parle ?
◦ Dans l'intérêt global, quelle est la meilleure stratégie ?

Dans cette situation, les intérêts individuels s'opposent aux intérêts collectifs. Le dilemme réside dans le fait que les deux joueurs gagnent collectivement à se taire mais qu'individuellement, ils ont intérêt à dénoncer quel que soit le comportement de l'autre.

- On veut décrire le jeu sous forme normale, compléter la matrice de gains suivante :

	B ne dénonce pas	B parle
A ne dénonce pas		(-10 ; 0)
A parle		

<u>Exemple 3 :</u>

LA BATAILLE DES SEXES

Description

Un couple, Paul et Claire veut décider d'une sortie. L'un préfère aller voir un film au cinéma et l'autre préfère aller à voir un concert. Pour chacun, être avec l'autre est plus important que le lieu.

A partir du tableau des gains suivants, pouvez-vous dire qui de l'homme ou de la femme préfère le cinéma ?

Claire / Paul	Cinéma	Concert
Cinéma	(2 ; 1)	(0 ;0)
Concert	(0 ; 0)	(1 ; 2)