Dérivation : points communs entre une courbe et ses tangentes

Contexte pédagogique

Objectifs

Dans le cadre d'une résolution de problèmes :

- Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction.
- Résoudre une équation du second degré.
- Factoriser une expression

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Application : nombre dérivé, tangente.	• Calculer le nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente. • Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré. • Tracer une tangente.	La tangente en un point K d'abscisse x_K est définie comme la droite passant par K de coefficient directeur $f'(x_K)$.
Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3.	• Déterminer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3.	

Prérequis, capacités

- Équation réduite d'une droite.
- Résolution d'une équation du second degré.
- Calcul littéral (pour les cas généraux).

Les intentions

La tangente à une courbe est parfois décrite, à tort, comme la droite n'ayant qu'un point commun avec cette courbe.

Nous étudierons la courbe représentative de la fonction carré pour vérifier que cela peut être le cas. Mais l'étude de la courbe représentative de la fonction cube montrera aussi qu'une tangente peut avoir plusieurs points communs avec la courbe représentative de la fonction.

Introduction

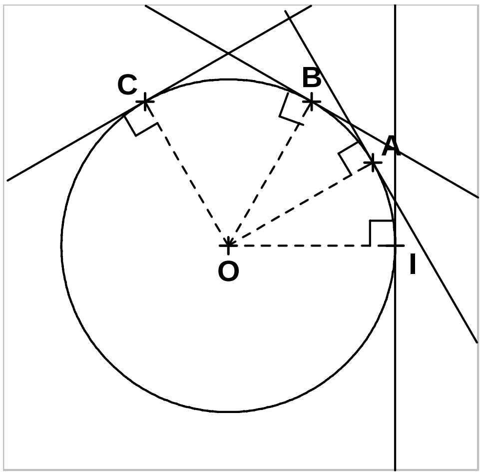
Quelques « définitions » lues

Le mot Tangente vient du latin tangere, toucher.

Voici quelques définitions que nos élèves pouvaient lire sur internet en mars 2012 :

- « Une ligne droite tangente à une courbe est la limite des positions d'une sécante dont un des points d'intersection avec la courbe va en se rapprochant indéfiniment de l'autre ; réciproquement, la courbe est tangente à la ligne droite. La ligne droite peut être sécante à la courbe en un autre point ; elle peut même traverser la courbe au point de tangence comme cela a lieu pour les droites tangentes aux points d'inflexion. » (Dictionnaire Littré)
- « Tangent : se dit d'une courbe vis-à-vis d'une autre courbe, ou d'une surface vis-à-vis d'une autre surface ou d'une courbe, quand leur contact est d'ordre supérieur ou égal à 2. » (Dictionnaire Larousse)
- « La tangente est une droite ayant un point de contact avec une courbe et qui fait un angle nul avec elle en ce point. » (Wikipédia)

Idée préconçue des élèves : « la tangente touche la courbe en un seul point »



Certains élèves pensent qu'une tangente à une courbe donnée est une droite qui n'a qu'un point commun avec cette courbe.

Cette idée vient peut-être du fait que le mot tangente apparaît dans les programmes de mathématiques de quatrième : la tangente à un cercle de centre O en un point donné A du cercle est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[OA]$; cette droite n'a qu'un point commun avec le cercle.

Présentation du problème

Le but de cette activité est de faire constater et éventuellement démontrer aux élèves que s'il est possible que la tangente à la courbe représentative d'une fonction n'ait qu'un seul point avec cette courbe, ce n'est pas toujours le cas.

Dans un premier temps, on peut faire remarquer aux élèves qu'un cercle ne représente pas une fonction et on peut souligner le fait qu'en lycée on étudie les tangentes à la courbe représentative d'une fonction.

Dans cette activité, on proposera l'étude de deux cas :

- le cas d'une tangente à une parabole : il y a unicité du point commun entre la parabole et sa tangente ;
- le cas d'une tangente à la courbe représentative de la fonction cube : la courbe représentative d'une fonction et une de ses tangentes peuvent avoir plusieurs points communs.

Il est possible de simplement montrer les courbes concernées aux élèves et de leur faire constater les résultats souhaités sur les tangentes. On peut aussi envisager de démontrer les résultats observés.

La résolution d'une équation du second degré est au programme de 1ère STMG. On pourra réinvestir cette connaissance dans les différentes activités proposées ci-dessous.

Unicité du point commun entre une parabole et une de ses tangentes.

Exemple d'énoncé dans un cas particulier :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - x - 5$. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer $f(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
3. Résoudre dans **R** l'équation $f(x) = x - 6$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exemple d'énoncé dans le cas général :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit la fonction f définie sur **R** par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f.
Soit $K(x_0 ; y_0)$ un point de (C) et soit $y = mx + p$ l'équation réduite de la tangente à (C) au point K.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.
2. En déduire m.
3. Montrer que $p = c - ax_0$.
4. En déduire que la tangente à (C) en K a pour équation $y = (2ax_0 + b)x + c - ax_0$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = (2ax_0 + b)x + c - ax_0$ a une seule solution. Conclure.

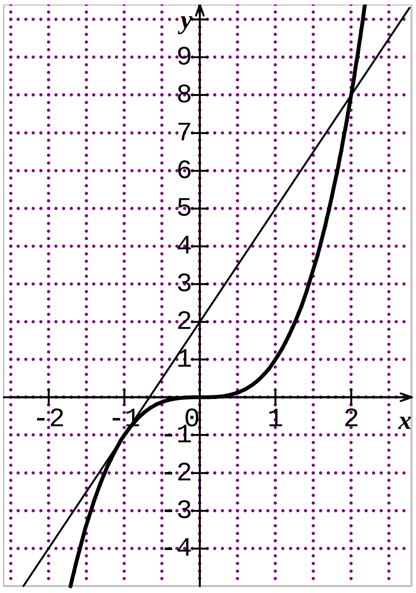
Cas de la fonction cube : une tangente n'a pas toujours un seul point commun avec la courbe

Le plan étant rapporté à un repère orthogonal, on considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^3$ et on appelle (C) sa courbe représentative.

On pourra commencer par faire remarquer la position particulière de la tangente au point d'abscisse 0 : la tangente « coupe » la courbe : pour $x < 0$, la courbe (C) est au-dessous de la tangente alors que pour $x > 0$ la courbe (C) est au-dessus.

On pourra ensuite demander aux élèves de déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse –1, puis de résoudre l'équation $x^3 = 3x + 2$ qui est équivalente à $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Ce peut être l'occasion d'utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre l'équation $x^3 = 3x + 2$ ou pour factoriser le polynôme $x^3 - 3x - 2$.



Exemple avec le logiciel Xcas :

```
resoudre(x^3=3x+2)
                    (-1, 2 )
factoriser(x^3-3x-2)
                    (x-2)*(x+1)^2
```

Remarque : La factorisation d'un polynôme de degré 3 n'est pas au programme de 1ère STMG, mais il peut être intéressant de faire remarquer que $x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x - (-1))(x - (-1))$ et d'en donner une interprétation géométrique.

La droite d'équation $y = 3x + 2$ est tangente à la courbe représentant la fonction cube au point d'abscisse –1 (–1 est une racine d'ordre 2) ; cette droite coupe la courbe représentant la fonction cube au point d'abscisse 2 (2 est une racine d'ordre 1).

Approfondissement

Exemple d'énoncé pour le cas général :

Le plan étant rapporté à un repère orthogonal, on considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^3$ et on appelle (C) sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse x_0.
3. On veut résoudre l'équation $x^3 = 3x_0^2 x - 2x_0^3$.

3.A. Montrer que, pour tout x réel, $x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = (x - x_0)(x - x_0)(x - 2x_0)$.

3.B. En déduire les solutions dans **R** de l'équation $x^3 = 3x_0^2 x - 2x_0^3$.

3.C. Conclure quant au nombre de solutions de l'équation $x^3 = 3x_0^2 x - 2x_0^3$ et au nombre de points communs entre la courbe (C) et la tangente au point d'abscisse x_0. (On distinguera deux cas : $x_0 \neq 0$ et $x_0 = 0$).