Dérivation : nombre dérivé et tracé de tangentes

Contexte pédagogique

Objectifs

- Calculer un nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente.
- Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré.
- Utiliser un algorithme ou une feuille automatisée de calcul pour obtenir des données.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Application : nombre dérivé, tangente.	• Calculer le nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente. • Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré. • Tracer une tangente.	La tangente en un point K d'abscisse x_K est définie comme la droite passant par K de coefficient directeur $f'(x_K)$.

Prérequis, capacités

- Équation réduite d'une droite.

Utilisation d'outils logiciels :

- Adressage relatif, adressage absolu.
- Programmation de la calculatrice.

Les intentions

À partir d'une fonction trinôme du second degré, on déterminera les coordonnées de plusieurs points de la courbe ainsi que le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des tangentes en ces points. Le tracé de ces tangentes à l'aide de différentes méthodes permettra non seulement d'entretenir la compétence de tracé de droite mais également de découvrir la notion d'enveloppe tangentielle d'une courbe.

En classe de seconde, les élèves ont appris à tracer des droites dont on connaît l’équation réduite : c’est encore difficile pour beaucoup d’élèves en fin de seconde et il paraît judicieux de consolider ou d’entretenir cette compétence à ce moment-ci du programme.

Outre le tracé de droites à partir de leur équation réduite, on peut également faire tracer des droites dont on connaît :

- un point et l’ordonnée à l’origine,
- un point et le coefficient directeur.

Nous proposerons ici de travailler sur ces deux derniers types de tracés ; le tracé d’une tangente à partir de son équation réduite sera, quant à lui, exploité à plusieurs reprises dans les autres activités portant sur la tangente.

Afin de motiver cette activité de tracer des droites, on pourra demander aux élèves d’effectuer plusieurs tracés de tangentes sans que la courbe représentative de la parabole étudiée ne soit donnée : ce sera l’occasion de leur faire découvrir l’enveloppe tangentielle d’une parabole.

Cet exercice peut être l’occasion d’utiliser un tableur ou un algorithme afin d’obtenir simplement les informations nécessaires au tracé de tangentes : coordonnées d’un point, coefficient directeur ou ordonnée à l’origine selon les problèmes rencontrés.

Exemples d’activités

Construction de tangentes

Présentation du problème

On s’intéresse à la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 5$; on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Sans tracer la courbe représentative de f, on souhaite tracer plusieurs tangentes à (C). Ainsi, on verra apparaître l’allure de la courbe (C).

Pour cela, on demande aux élèves de compléter un tableau donnant pour différentes abscisses x_K :

- l’ordonnée du point de la courbe (C) correspondant, c’est-à-dire $f(x_K)$,
- le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point d’abscisse x_K, c’est-à-dire $f'(x_K)$,
- l’ordonnée à l’origine de la tangente à la courbe (C) au point d’abscisse x_K, c’est-à-dire $f(x_K) - f'(x_K) \times x_K$.

Un tel tableau peut être complété à l’aide du tableur ou à l’aide d’un algorithme, comme présenté ci-après.

<u>Avec le tableur :</u>

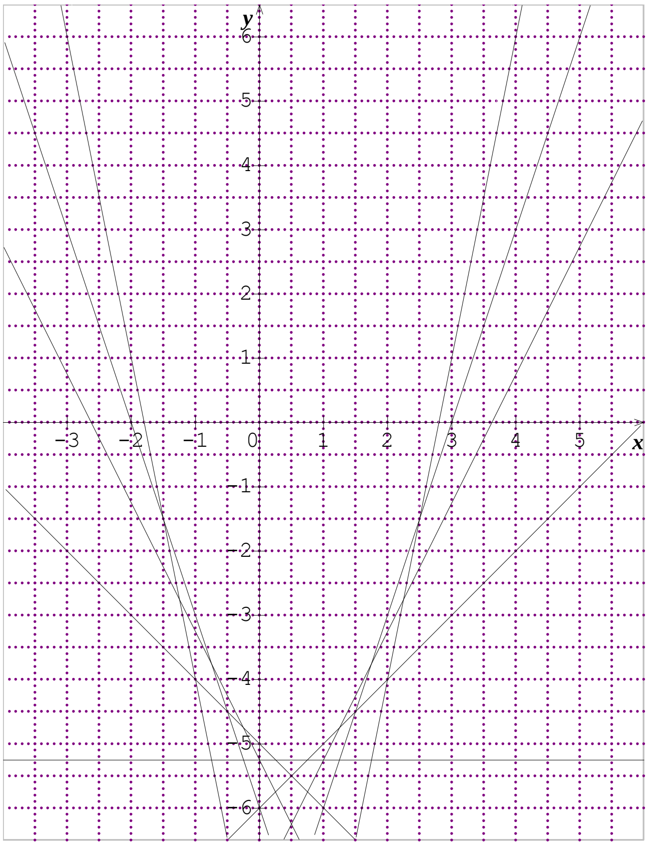
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	***f* (*x*) = *ax*² + *bx* + *c***				***f* ' (*x*)= 2 *ax* + *b***			Tangente au point d'abscisse ***x*** :		
2	***a***	***b***	***c***					coefficient directeur ***m* = *f* ' (*x*)**		
3	1	-1	-5					ordonnée à l'origine ***p***		
4										
5	***x***	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
6	***f* (*x*)**	1	-3	-4,25	-5	-5,25	-5	-4,25	-3	1
7	***f* ' (*x*)= *m***	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
8	***p***	-9	-6	-5,25	-5	-5,25	-6	-7,25	-9	-14

Dans la cellule B6 : =$A$3*B5^2+$B$3*B5+$C$3

Dans la cellule B7 : =2*$A$3*B5+$B$3

Dans la cellule B8 : =B6-B8*B5

Il est intéressant de laisser alors les élèves choisir de tracer les différentes tangentes soit à partir du point de (C) et du coefficient directeur de la tangente, soit à partir du point de (C) et de l’ordonnée à l'origine de la tangente. Selon les valeurs obtenues, l'un ou l'autre des choix semble plus judicieux. Ainsi, les ordonnées à l'origine surlignées dans le tableau ci-dessus sont de valeur absolue grande et moins intéressantes pour le tracé des tangentes que le coefficient directeur.



Avec un algorithme (et avec la calculatrice) :

On considère une fonction polynôme du second degré donnée sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, (où a, b et c sont des nombres réels, a étant non nul), et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'algorithme ci-dessous permet de calculer les coordonnées (X ; Y) du point de (C) d'abscisse X, le coefficient directeur M et l'ordonnée à l'origine P de la tangente à (C) en ce point, ceci pour X variant de – 2 à 3 avec un pas de 0,5.

Cet algorithme peut être modifié pour changer les valeurs de X considérées, pour n'afficher que le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la tangente ou que le point de tangence et le coefficient directeur de la tangence, etc.

T.I.

```
PROGRAM:TANGENTE
:Prompt A
:Prompt B
:Prompt C
:For(I,-2,3,.5)
:I→X
:A*I^2+B*I+C→Y
:2*A*I-B→M
:Y-M*I→P
:Disp "X=",X
:Disp "Y=",Y
:Disp "M=",M
:Disp "P=",P
:Pause
:End
```

Casio

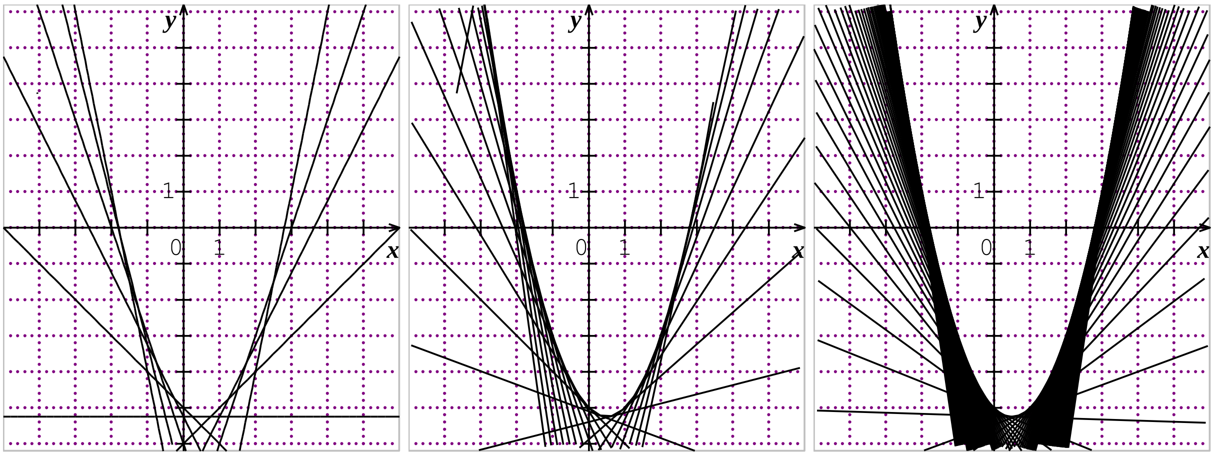
```
======TANGENTE======
"A=":?→A↵
"B=":?→B↵
"C=":?→C↵
For -2→I To 3 Step 0.
5↵
I→X↵
A×I^2+B×I+C→Y↵
2×A×I+B→M↵
Y-M×I→P↵
"X=":X◢
"Y=":Y◢
"M=":M◢
"P=":P◢
Next↵
```

Remarque : On peut utiliser la fonction « nderiv » de la calculatrice pour calculer le coefficient directeur M.

Enveloppe tangentielle

Une fois que les élèves ont tracé un certain nombre de tangentes, on peut montrer, à l'aide d'un traceur de courbes, que si on trace beaucoup de tangentes à une parabole, l'allure de la parabole apparaît.

Exemple pour la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^2 - x - 5$, avec le logiciel *Sine qua non* :



(Pour obtenir le deuxième dessin, on a utilisé « Représentation paramétrique $x(t)$, $y(t)$ », puis on a fixé à 20 le nombre de valeurs de T, puis on a cliqué sur le bouton « Autres options… » pour ensuite choisir « enveloppe tangentielle » ; pour obtenir le troisième dessin, on a défini la fonction, puis après avoir cliqué sur le bouton « Autres options », on a coché « enveloppe tangentielle »).

Prolongement

On pourra montrer l'enveloppe tangentielle des courbes représentant des fonctions polynômes de degré 3.

Exemple ci-dessous avec la représentation graphique de la fonction cube.