**TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE**

Ce module s’inscrit en complément des enseignements de théorie du signal délivrés dans les autres matières. Les étudiants y ont observé qu’un signal déterministe possède une « em­preinte spectrale », constituée de raies dans le cas d’un signal périodique, continue dans le cas d’un signal de durée finie, plus complexe dans le cas général.

C’est dans ce cadre général que se pose la question du calcul effectif du spectre d’un signal sur une machine (ordinateur, analyseur de spectre), et qu’intervient la transformée de Fourier discrète (TFD). Après l’avoir définie, le professeur la mettra en œuvre sur ordinateur dans quelques cas concrets, et commentera, en interdisciplinarité, les imperfections constatées (re­pliement de spectre, ondulations). Les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier discrète (TFD) seront ensuite exposées, et vérifiées sur machine.

Un dernier paragraphe portera sur le filtrage numérique et sa réalisation par TFD et TFD inverse. Cet apport est un approfondissement qui peut être utile aux étudiants souhaitant des compléments spécifiques au traitement du signal. À ce titre, il ne fait pas l’objet d’une évaluation et pourra être enseigné durant les heures d’accompagnement personnalisé (AP).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| CONTENUS | CAPACITÉS ATTENDUES | COMMENTAIRES |
| **Définition mathématique de la transformée de Fou­rier discrète (TFD)**On note $ω=e^{i.\frac{2π}{n}}$, $n\geq 2$ entier naturel donnéLa TFD d’une séquence $\left(x\_{0},x\_{1},…,x\_{n-1}\right)$ de $n$ com­plexes est une séquence $\left(X\_{0},X\_{1},…,X\_{n-1}\right)$ de $n$ nou­veaux complexesObservation de la TFD d’une acquisition (éventuellement complétée de zéros) à la ca­dence $T\_{ech}$ d’un signal  | Placer 1, $ω$, … $ω^{n-1}$, ainsi que 1, $ω^{-1}$, … $ω^{-\left(n-1\right)} $sur le cercle unité. $ω^{n}=1$ Simplifier $ω^{k}$, $k\in Z$sur des exemples.$X\_{l}=\sum\_{k=0}^{n-1}x\_{k}.ω^{-k.l}$ Calcul sur logiciel de la TFD à l’aide d’une matrice de TFD.Calculer la TFD à l’aide de commandes logicielles prêtes à l’emploi.Traiter une sinusoïde, jouer sur $T\_{ech}$, le nombre de zéros ajoutés aux bords (« Zero Padding »), le nombre total d’échantillons. Lecture cri­tique du résultat. | Ces notions seront illustrées avec des valeurs précises de $n$ (2, 3, 4, 5 …). Le symbole $ω$ utilisé ici est parfois noté w, pour éviter toute confusion avec une pulsation en sciences phy­siquesL’algorithme de transformée de Fourier discrète rapide (FFT) est hors programme. Son existence peut cependant être évoquée.Expérimentations à faire sur un logiciel de calcul vectoriel (type Scilab) et, en interdis­ciplinarité, sur l’analyseur de spectre. Il est admis en ma­thématiques que la première moitié de cette TFD ap­proxime le spectre du signal originel aux fréquences 0, $\frac{1}{n.T\_{ech}}$, $ \frac{2}{n.T\_{ech}}$ …, $\frac{1}{2.T\_{ech}}$. |
| **Propriétés mathématiques élémentaires de la trans­formée de Fourier discrète (TFD)**Linéarité de la TFDRéversibilité de la TFDEffet d’une conjugaisonFormule de BesselEffet d’un décalage fréquen­tiel | *TFD* d’une somme, éven­tuellement pondérée.$x\_{k}=\frac{1}{n}\sum\_{l=0}^{n-1}X\_{l}.ω^{+k.l}$ $\overbar{TFD}\left(\overbar{x\_{0}},\overbar{x\_{1}},…,\overbar{x\_{n-1}}\right)=n.TFD^{-1}\left(x\_{0},x\_{1},…,x\_{n-1}\right)$ $\sum\_{k=0}^{n-1}\left|x\_{k}\right|^{2}=\frac{1}{n}\sum\_{l=0}^{n-1}\left|X\_{l}\right|^{2}$ $$TFD\left(x\_{0},x\_{1}.ω,…,x\_{n-1}ω^{n-1}\right)=\left(X\_{n-1},X\_{0},…,X\_{n-2}\right)$$ | Admis, et à vérifier sur logi­ciel à partir d’un exemple.Formule non exigible de mémoireAdmis, et à vérifier sur logi­ciel à partir d’un exemple. En interdisciplinarité : inter­pré­tation énergétique.Formule non exigible de mémoire. À vérifier sur logi­ciel à partir d’un exemple. En interdisciplinarité : opéra­tion connue sous le nom de trans­position fréquentielle. |
| **Propriétés avancées de la transformée de Fourier discrète (TFD), opération de filtrage numérique**Convolution apériodique de deux suites $\left(…,u\_{-1},u\_{0},u\_{1},…\right)$ et $\left(…,h\_{-1,}h\_{0},h\_{1},…\right)$ Convolution circulaire d’une séquence $\left(u\_{0},u\_{1},…,u\_{n-1}\right)$ par une autre de même lon­gueur $\left(h\_{0},h\_{1},…,h\_{n-1}\right)$TFD d’une convolution cir­culaireFiltrage d’une suite $\left(u\_{0},u\_{1},…\right)$ causale infinie par une séquence $\left(h\_{0},h\_{1},…,h\_{l-1}\right)$ | $\left(u\*h\right)\_{k}=\sum\_{l=-\infty }^{+\infty }u\_{k-l}.h\_{l}$ Expliciter $\left(u\*h\right)\_{k}$ quand les suites $u$ et $h$ sont causales, et que $h$ est de longueur finie et courte. $\left(u⊗h\right)\_{k}=$ $\sum\_{l=0}^{n-1}u\_{k-l [n]}.h\_{l}$Expliciter $\left(u⊗h\right)\_{k}$ pour des valeurs précises de $n$.$TFD\left(u⊗h\right)=TFD\left(u\right). TFD\left(h\right)$$$u⊗h=TFD^{-1}\left(TFD\left(u\right). TFD\left(h\right)\right)$$Introduction à la méthode d’ « Overlap and Save ». | La formule pourra ne pas être présentée telle que aux étu­diants, mais en renversant $h$ puis en la décalant.La formule pourra ne pas être présentée telle que aux étu­diants, mais en renversant $h$ puis en la faisant tourner autour de $u$.Admis.Des expériences sur des fi­chiers sons pourront être faites sur logiciel. |